



ISBN 978-619-7142-04-4

Международна научна школа "Парадигма".

Лято-2015

сборник научни статии в 8 тома

том 1

**Моделиране
на системи и процеси**

Република България
Варна

2015



Център за научни изследвания и информация «Парадигма»

Международна научна школа "Парадигма". Лято-2015

сборник научни статии в 8 тома

Том 1. Моделиране на системи и процеси

**ВАРНА
2015**

УДК 082.2 (063)
ББК 60
М 43

М 43 Международна научна школа "Парадигма". Лято-2015. В 8 т. Т.1: Моделиране на системи и процеси: сборник научни статии / под ред. С.Л. Блюмин. – Варна: ЦНИИ «Парадигма», 2015. – 242 с.

Сборник съдържа материали летней (2015) сесии Международной научной школы "Парадигма" (Варна, България).

В настоящем томе представлены работы по тематикам, близким к моделированию систем и процессов.

Все статьи подобраны и рекомендованы после коллегиального экспертного рассмотрения. Статьи публикуются в авторской редакции.

The collection contains materials summer (2015) session of the International scientific school "Paradigm" (Varna, Bulgaria).

This volume contains materials about modeling of systems and processes.

All articles are selected and recommended after peer review. Articles are published in author's edition.

ISBN 978-619-7142-04-4

© С.Л. Блюмин, редактор-съставител, 2015

© Автори, 2015

Издател:

"ЦЕНТЪР ЗА НАУЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ И

ИНФОРМАЦИЯ "ПАРАДИГМА" ЕООД

БЪЛГАРИЯ, област Варна, община Варна,

гр. Варна 9002, район р-н Одесос, ул. Опълченска No 27

E-mail: cparadigma@abv.bg Факс: +35952919740

Международна научна школа "Парадигма". Лято-2015.

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ



ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Сопредседатели:

Попов Теодор, доктор, профессор, руководитель кафедры «Медицинское образование», Факультет общественного здравоохранения, Медицинский университет – София, Член – корреспондент ИНГА (София, Республика Болгария)

Фурсов Андрей Львович, кандидат экономических наук, зам.зав.кафедрой правовой информатики и социально-гуманитарных дисциплин Поволжского (г. Саратов) юридического института (филиала) Всероссийского государственного университета юстиции, директор научно-исследовательского института «Парадигма» (Россия).

Янакиева Елка Кирилова, доктор педагогических наук, профессор, почётный доктор наук НОУ ВСОА, действительный член МАН, Югозападный университет им. Неофита Рильского (г. Благоевград, Республика Болгария).

Члены оргкомитета:

1. **Абакаров Дмитрий Казбекович**, кандидат социологических наук, зам.зав.кафедрой менеджмента, государственного и муниципального управления Брянского филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Россия).

2. **Анжиганова Лариса Викторовна**, доктор философских наук, профессор, профессор кафедры философии и культурологии ХГУ им. Н.Ф. Катанова, Министерство национальной и территориальной политики Республики Хакасия, заместитель министра (Россия).

3. **Антамошкин Александр Николаевич**, доктор технических наук, профессор, профессор Сибирского государственного аэрокосмического университета им. акад. М.Ф. Решетнева (Россия).

4. **Ахметова Людмила Владимировна**, доцент, кандидат психологических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный педагогический университет» (Россия).

5. **Балканска Полина Ангелова**, профессор, доктор медицины, Медицински университет — (София, Республика Болгария).

6. **Баратов Шариф Рамазанович**, доктор психологических наук, профессор Бухарского государственного университета, академик МАПН (Бухара, Республика Узбекистан).

7. **Бафаев Мухиддин Мухамматович**, преподаватель, и.о. заведующего кафедрой психологии Бухарского государственного университета (Бухара, Республика Узбекистан).

8. **Белобрыкина Ольга Альфонсасовна**, кандидат психологических наук, доцент, профессор кафедры общей психологии и истории психологии ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный педагогический университет», академик Академии полярной медицины и экстремальной экологии человека (Россия).

9. **Берлов Антон Владимирович**, доктор медицинских наук, доктор психологических наук, профессор, профессор кафедры стоматологии Московского института усовершенствования врачей, Заслуженный деятель науки и образования РФ, академик РАЕ (Россия).

10. **Блюмин Семен Львович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета (Россия).

11. **Бобкова Елена Юрьевна**, кандидат педагогических наук, доцент (Россия).

12. **Борисов Сергей Александрович**, кандидат экономических наук, доцент кафедры «Экономика, управление и финансы», Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева (Россия).

13. **Вержибок Галина Владиславовна**, кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии Минского государственного лингвистического университета (Минск, Республика Беларусь).

14. **Владиминова Ирина Львовна**, доктор экономических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г.В.Плеханова (Россия).

15. **Горанова-Спасова Радка Николаева**, доктор медицины, ассистент кафедры «Медицинской этики и права», Факультет общественного здравоохранения, Медицинский университет-София (София, Болгария).

16. **Долгов Вадим Викторович**, доктор исторических наук, профессор кафедры истории России Удмуртского государственного университета (Россия).

17. **Заславская Ольга Юрьевна**, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры информатизации образования Института математики, информатики и естественных наук ГБОУ ВО МГПУ, начальник управления программ развития и аналитической деятельности ГБОУ ВО МГПУ (Россия).

18. **Заславский Алексей Андреевич**, кандидат педагогических наук, Муниципальное бюджетное учреждение «ИТ-Центр системы образования городского округа Химки» (г.Москва) начальник отдела комплексного технического сопровождения (Россия).

19. **Капрусова Марина Николаевна**, кандидат филологических наук, доцент, доцент кафедры филологических дисциплин и методики их преподавания Борисоглебского филиала ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» (Россия).

20. **К"Озяк Анастасия Александровна**, d.o.o. Eurowest, психолог-консультант (Ljubljana, Slovenija).

21. **Костригин Артем Андреевич**, ассистент кафедры психологии управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского (Россия).

22. **Кравец Олег Яковлевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры АВС Воронежского государственного технического университета (Россия).

23. **Мазилев Владимир Александрович**, доктор психологических наук, профессор, академик МАПН, заведующий кафедрой общей и социальной психологии, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского (Россия).

24. **Морогин Владимир Григорьевич**, доктор психологических наук, профессор, академик МАПН, профессор кафедры психологии Медико-психолого-социального института ФГБОУ ВПО «ХГУ им. Н.Ф. Катанова» (Россия).

25. **Найханова Лариса Владимировна**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системы информатики» ФГБОУ ВПО Восточно-Сибирского государственного университета технологии и управления (Россия).

26. **Перова Маргарита Борисовна**, доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры экономической теории, учета и анализа Вологодского государственного университета (Россия).

27. **Петков Петко**, магистр, докторант кафедры медицинского образования Факультета общественного здравоохранения Медицинского университета (София, Болгария).

28. **Петьков Виталий Анатольевич**, кандидат психологических наук, доцент кафедры менеджмента организаций, «Межрегиональная академия управления персоналом», Херсонский институт, (г. Херсон, Украина).

29. **Подколзин Михаил Михайлович**, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент (Россия).

30. **Поляков Юрий Анатольевич**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры инжиниринга технологического оборудования, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (Россия).

31. **Провоторов Вячеслав Васильевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры уравнений в частных производных Воронежского государственного университета (Россия).

32. **Родина Наталья Владимировна**, доктор психологических наук, профессор кафедры социальной и прикладной психологии ОНУ (Одесский национальный университет) имени И.И. Мечникова (Одесса, Украина).

33. **Саенко Людмила Владимировна**, кандидат юридических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Всероссийский государственный университет юстиции» (Россия).

34. **Седова Нелли Алексеевна**, кандидат технических наук, доцент, Морской государственный университет им. адм. Г.И. Невельского (Россия).

35. **Сибирская Елена Викторовна**, доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры статистики РЭУ им. Г.В. Плеханова (Россия).

36. **Слюсаренко Нина Витальевна**, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры педагогики, психологии и образовательного менеджмента Херсонского государственного университета (Херсон, Украина).

37. **Соловьева Анна Геннадьевна**, кандидат биологических наук, профессор РАЕ, с.н.с. ФГБУ «Приволжский Федеральный медицинский исследовательский центр» Минздрава России (Россия).

38. **Стоюхина Наталья Юрьевна**, кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Россия).

39. **Товуу Наталия Оюновна**, доктор психологических наук, профессор, заведующая кафедрой психологии и акмеологии образования Тувинского государственного университета (Россия).

40. **Трендафилова Антония Трандева**, ассистент Факультета общественного здоровья, Медицинский университет-София (София, республика Болгария).

41. **Тулаганов Абдукабил Абдунабиевич**, доктор технических наук, профессор, ректор Бухарского государственного университета (Бухара, Узбекистан).

42. **Тушавин Владимир Александрович**, кандидат технических наук, доцент кафедры инноватики и интегрированных систем качества Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения (Россия).

43. **Харченко Вера Сергеевна**, кандидат социологических наук, доцент кафедры социологии и политологии ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет» (Россия)

44. **Хусяинов Тимур Маратович**, председатель СНО Факультета социальных наук ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (Россия).

45. **Чупров Леонид Федорович**, кандидат психологических наук, профессор РАЕ, Full Member of EuАНН, главный редактор научного журнала «Вестник по педагогике и психологии Южной Сибири» (Россия).

46. **Шурыгина Юлия Юрьевна**, доктор медицинских наук, профессор, заведующая кафедрой «Социальные технологии», Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (Россия).

47. **Якимец Светлана Викторовна**, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры педагогики Орского гуманитарно-технологического института (филиал) Оренбургского государственного университета (Россия).

48. **Янева Румяна Тодорова**, доктор, доцент, доцент кафедры экономики здравоохранения, Факультета общественного здравоохранения. Медицинский университет (София, Болгария).

Редакционна коллегия тома

Блюмин Семен Львович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета (Россия) – *редактор-составитель*

Антамошкин Александр Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор Сибирского государственного аэрокосмического университета им. акад. М.Ф. Решетнева (Красноярск, Россия)

Заславская Ольга Юрьевна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры информатизации образования Института математики, информатики и естественных наук ГБОУ ВО МГПУ, начальник управления программ развития и аналитической деятельности ГБОУ ВО МГПУ (Москва, Россия)

Кравец Олег Яковлевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры АВС Воронежского государственного технического университета (Россия)

Найханова Лариса Владимировна, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системы информатики» ФГБОУ ВПО Восточно-Сибирского государственного университета технологии и управления (Россия)

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры уравнений в частных производных Воронежского государственного университета (Россия)

Тулаганов Абдукабил Абдунабиевич, доктор технических наук, профессор, ректор Бухарского государственного университета (Бухара, Узбекистан)

Предисловие

Лето – пора отпусков. В особенности это относится к научно-педагогическим работникам. Обычно в отпуске люди отдыхают, восстанавливаются, сбрасывают груз накопившихся проблем, чтобы с новыми силами начать новый учебный год.

Но научно-педагогические работники – особенная категория. Даже летом, даже в отпуске они смогли собраться и украсить результатами своих исследований труды мероприятия «Международна научна школа "Парадигма". Лято-2015» (Варна, Болгария).

В настоящем томе представлены работы по тематикам, близким к информационным и телекоммуникационным технологиям. Это – современная и актуальная отрасль современной науки, охватывающая фундаментальные и прикладные направления исследований в указанной области.

Состав участников, география редакционной коллегии и представленных работ обусловили высокий научно-практический уровень опубликованных материалов.

Четкая работа Оргкомитета мероприятия и его рабочей группы позволили в сжатые сроки успешно провести Летнюю школу. Международная заинтересованность очевидна – ведь между Оргкомитетом школы «Парадигма» и Science Book Publishing House (Yelm, WA, USA) достигнута договоренность об издании избранных трудов в печатной форме.

Успех проведенного мероприятия позволяет с уверенностью говорить о том, что и в будущем мы увидим результаты его плодотворной работы.

**Редактор-составитель
Блюмин Семен Львович,**

д.ф.-м.н., проф., профессор кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета (Россия)

УДК 517.9

Nguyen Thi Hien

Ph.D of Physics and Mathematics sciences, University of transport and communications, Hanoi, Vietnam.

THE SMOOTH MODEL OF SOME RELAY - TYPE SYSTEMS AND ITS APPLICATIONS

Abstract: The paper is proposed a model of relay-type system following the ordinary differential equation with a large parameter K . The main result is presented in theorem which gives the approximate of the smooth model to the exact model that is called the locally explicit model Priadko-Sadovskiy of relay-type system when K tends to infinity. We can therefore adjust K for which, the smooth model can be considered as equivalent to the exact model. The usefulness of this model is illustrated via a concrete example.

Key words: Relay-type system, locally explicit model, smooth model.

1. Introduction

The Russian school under the supervision of Krasnoselskiy has been doing intensively research the set of applied mathematical problems with hysteresis nonlinearity [2], [3], [4]. Many articles and monographs dedicate to different issues which relate to hysteresis nonlinearities (see [6], [8], [1] and [9]). In the present paper, we consider the relay as a inverter with a continuous input function $x(t)$ and a discontinuous output function $y(t)$, which assumes only the values 0 and 1. The inverter describes the change of the state $y(t) \in \{0,1\}$ of a non-ideal relay with the lower and upper *relay threshold values* α and β , where $\alpha < \beta$. By the permissible states of relay are meant all pairs $(x, y) \in R^2$ satisfying the condition $(x < \beta$ and $y = 0)$ or $(x > \alpha$ and $y = 1)$ (see Fig.1).

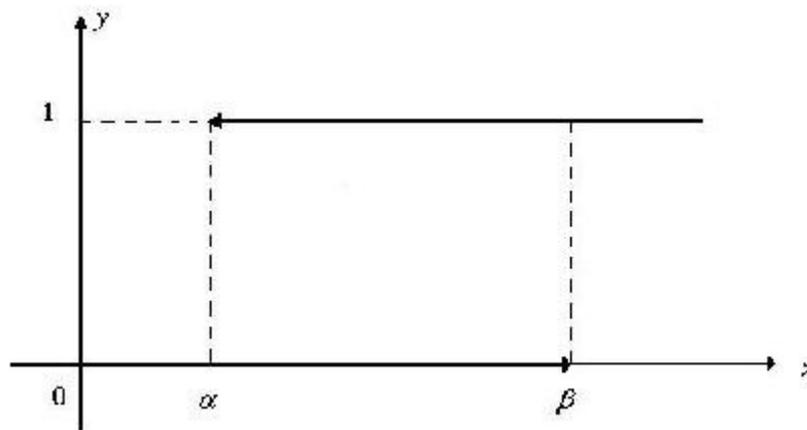


Fig.1. The permissible states of relay.

Follow [10], the analytical description of such relay system leads to the locally explicit equation

$$y(t + dt) = \begin{cases} 0, & \text{if } x(t) \leq \alpha, \\ 1, & \text{if } x(t) \geq \beta, \\ y(t), & \text{if } \alpha < x(t) < \beta. \end{cases} \quad (1)$$

Obviously, the model (1) is non-smooth, so the model is not convenient for numerical and qualitative analysis. Therefore, the advanced packages of the applied programs may be used to analyze numerically the relay control systems, as well as for qualitative study with the use of numerical experiments. At that, the model of relay-type systems based on the ordinary differential equation proves to be most convenient.

The smooth model is defined as follows:

$$\begin{cases} \dot{w} = K \left[(x - \beta)_+ (1 - w) - (\alpha - x)_+ w \right], \\ \tilde{y} = \text{int} \left(w + \frac{1}{2} \right). \end{cases} \quad (2)$$

Here:

$w = w(t)$ is the intermediate (smooth) output function;

K is a large parameter;

$x = x(t)$ is the continuous input function;

$\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ is the (discrete) output function;

x_+ is $\max\{0, x\}$;

$\text{int } x$ is the left-continuous integer part of the value x , that is, the greatest integer smaller than x .

One can easily see that

$$w(t_0) \in [0, 1] \Rightarrow w(t) \in [0, 1] \text{ for all } t \geq t_0. \quad (3)$$

Indeed, if, for example, $w(t) > 1$ for $t \in (t_1, t_2]$ and $w(t_1) = 1$, then $\dot{w}(\theta) > 0$ at some point $\theta \in (t_1, t_2)$, which contradicts (2).

2. Theorem on the practical equivalence of the locally explicit and the smooth relay models

Theorem: Suppose that the continuous input function $x(t)$ does not take threshold relay values α, β , in locally minimum and maximum points of this function $x(t)$, respectively. Then, in any interval $[t_0, T]$ a value μ tends 0 for $K \rightarrow +\infty$, where

$$\mu = \mu \left\{ t \in [t_0, T] : y(t) \neq \tilde{y}(t) \right\},$$

$y(t), \tilde{y}(t)$ are solutions of system (1) and (2), respectively, satisfying:

$$y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0.$$

Proof: We will prove this theorem in two cases. In the first case, when the locally relay model is not switched in $[t_0, T]$, consequently, the output relay function does not change its value and, thereby: $x(t) < \beta$ and $y_0 = 0$ in $[t_0, T]$. In this interval $y(t) = 0$ and $\dot{w} = -K(\alpha - x)_+ w$, then

$$w(t) = w_0 e^{-K \int_0^t (\alpha - x(s)) ds} = 0 = y(t),$$

consequently, $\tilde{y}(t) = y(t) = 0$. The proof is given similarly to the situation, where $x(t) > \alpha$ and $y_0 = 1$. Thus, we are proved that $\mu = 0$ in this first case.

Now, we consider the second case, when the locally relay model is switching in $[t_0, T]$. In this interval we will construct a sequence $(t_j : j \in N)$ as follows:

$$\begin{aligned} x(t_j) = \alpha \text{ and } x(t) < \beta \text{ for all } t \in [t_j, t_{j+1}), \\ x(t_{j+1}) = \beta \text{ and } x(t) > \alpha \text{ for all } t \in [t_{j+1}, t_{j+2}), \end{aligned} \quad (4)$$

that is, we construct the sequence of points at which the locally explicit relay model is switched. Now, we consider $\Delta = \inf_{j \in \mathbb{N}} \{t_{j+1} - t_j\}$ and we can easily see that $\Delta > 0$. Indeed, let us assume that $\Delta = 0$, then there exists a subsequence $\{t_{j_n}\} \subset \{t_j\}$, at that $t_{j_{n+1}} - t_{j_n} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow +\infty$. By virtue of the uniform continuous input function $x(t)$ in $[t_0, T]$ we can obtain:

$$|x(t_{j_{n+1}}) - x(t_{j_n})| < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

for all $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. It follows the contradiction with definition of points t_j because $|x(t_{j_{n+1}}) - x(t_{j_n})| = \beta - \alpha$ (see (4)). Thus, $\Delta > 0$ and from this fact, we can check that the sequence $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ is finite, the number elements of which does not exceed the following value:

$$m = \left\lceil \frac{T - t_0}{\Delta} \right\rceil + 1. \quad (5)$$

By virtue of the condition of the input function $x(t)$ (see the formulation of the theorem) we get that, for each point t_j ($1 \leq j \leq m$) there exists a positive value $\delta > 0$, such as, for all $t \in (t_j, t_j + \delta)$ we have that $x(t) < \alpha$ if $x(t_j) = \alpha$ and $x(t) > \beta$ if $x(t_j) = \beta$. Now, we take an arbitrary positive number $\varepsilon > 0$, then, we define:

$$\delta = \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq m} \{\delta_j\}, \frac{\varepsilon}{m+1} \right\} > 0 \quad (6)$$

Since in $[t_0, t_1]$ the output function of the locally relay model does not change, then from the proof in the first case it directly follows that $\tilde{y}(t) = y(t) = y_0$ for all $t \in [t_0, t_1]$. Next, we consider some intervals $(t_j, t_{j+1}]$ and we suppose that $x(t_j) = \alpha$, then by definition of point t_j we get that

$$\dot{w} = -K(\alpha - x)_+ w.$$

From this fact, it follows that the function $w(t)$ will be decreasing in $(t_j, t_{j+1}]$. In particular, we have that $\dot{w} = -K(\alpha - x)w$ for $t \in (t_j, t_j + \delta)$, and, consequently,

$$w(t) = w_j e^{-K \int_{t_j}^t (\alpha - x(s)) ds}. \quad (7)$$

For this j let us define values a_j and M_j , such as:

$$a_j = \int_{t_j}^{t_j + \delta} (\alpha - x(s)) ds; \quad (8)$$

$$M_j a_j > \ln 2.$$

Using the fact $w_j \in [0, 1]$ (see (3)), then it easy to check that

$$0 \leq w(t) \leq w(t_j + \delta) = w_j e^{-K a_j} < \frac{1}{2},$$

consequently, $\tilde{y}(t) = 0$ for all $t \in [t_j + \delta, t_{j+1}]$ and $K \geq M_j$. On the other hand, we have $y(t) = 0$ in $(t_j, t_{j+1}]$, so $\tilde{y}(t) = y(t) = 0$ in $[t_j + \delta, t_{j+1}]$, that is, in each interval $(t_j, t_{j+1}]$ functions $\tilde{y}(t), y(t)$ can not equal only for $t \in (t_j, t_j + \delta]$.

If $x(t_j) = \beta$, then for each j let us define values b_j and N_j as follows:

$$b_j = \int_{t_j}^{t_j + \delta} (x(s) - \beta) ds; \quad (9)$$

$$N_j b_j > \ln 2.$$

Similarly to the proof of situation, where $x(t_j) = \alpha$ we will obtain that $\tilde{y}(t) = y(t) = 1$ in $[t_j + \delta, t_{j+1}]$ for all $K \geq N_j$.

For each j ($1 \leq j \leq m$) one of values M_j, N_j is defined by expression (8) or (9), another will be 0. After that, we define $K_0 = \max_{1 \leq j \leq m} \{M_j, N_j\}$. Now, we can approve that for all $\varepsilon > 0$ and $K \geq K_0$ there is $\mu \leq m\delta < 0$ (see (5) and (6)). The theorem is completely proved.

3. Analysis example: a system with one relay in two-dimensional space

Let us consider the following system

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2y(t) & -\pi \\ \pi & 1-2y(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (10)$$

Here, $y(t)$ is the output function of the locally explicit (see (1)) relay model with the input function $x(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} = \|u(t)\|$.

For the numerical analysis of the system (10) we use the smooth relay model, in which, for example $K = 10^6$, as follows:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}}_1 \\ \dot{\tilde{u}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\tilde{y}(t) & -\pi \\ \pi & 1-2\tilde{y}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} \\ \tilde{u}(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (11)$$

Here, $\tilde{y}(t)$ is the output function of the smooth relay model (see Eq. (2))

with the input function $\tilde{x}(t) = \sqrt{\tilde{u}_1^2(t) + \tilde{u}_2^2(t)} = \|\tilde{u}(t)\|$.

Use the program Mathematica for the system (11) we can get the behavior of the relay system (10) as follows (see Fig. 2):

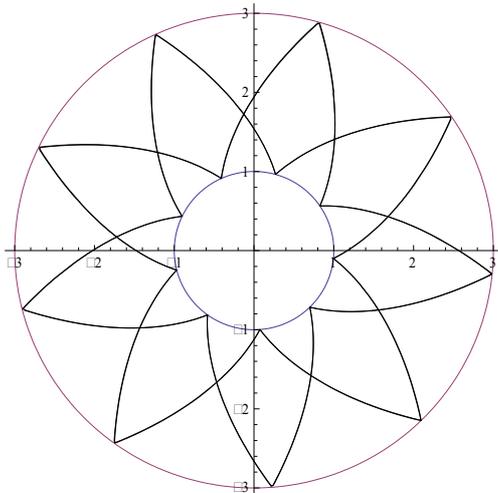


Fig.2. The behavior of system with one relay in two– dimensional space.

References

1. J. Appell, I.N. Pryadko, B.N. Sadovsky, *On the stability of some relay type regulation system*, Z. Angew.Math. Mech., 2008, 88, No.10, pp.808-816.
2. M.A. Krasnosel'skii, A.V. Pokrovskii, *Periodic oscillations in systems with relay nonlinearities*, Soviet Mathematics, 15 (1974), No 3, pp. 873- 877.
3. M.A. Krasnosel'skii, A.V. Pokrovskii, A.F. Klepcyn, E.A. Livshitz and A.A. Vladimirov, *Vector hysteresis nonlinearities of the von MisesTresca type*, Soviet Physics Doklady, 26(1981), No 3, pp. 581 - 583.
4. M.A. Krasnosel'skii and A.V. Pokrovskii, *Systems with Hysteresis*, Russian, 1983.

5. M.A. Krasnosel'skii and D.I. Rachinskii, *Continuums of cycles in systems with hysteresis*, DAN.2001.378.3, pp. 314-319.
6. I.D. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer-Verlag, 1991.
7. R. V. Nesterenko, B. N. Sadovskii, *Forced oscillations in a twodimensional cone*, *Automation and Remote Control*, 2002, Vol. 63, No. 2, pp. 181-188(8), ISSN: 0005-1179.
8. Nguyen Thi Hien, *Analysis of autooscillation in system with two relays*, Works of the Mathematical faculty, Voronezh VGU 2006, No 10, pp. 112-118, ISBN: 5-98222-123-6, in Russian.
9. Nguyen Thi Hien, *Smooth model of a support and gap*, Vestnik VGU, series: Physics - Mathematics, 2009, No. 2, pp. 92-95, ISSN: 1609-0705, in Russian.
10. I.N. Pryadko, B.N. Sadovskii, *On Locally Explicit Models of Some Nonsmooth Systems*, *Automation and Remote Control*, October 2004, Volume 65, Issue 10, pp. 1556-1565

Нгуен Тхи Хиен

Гладкая модель для некоторых релейных систем и его применение

Аннотация: В статье предложена гладкая модель для некоторых систем релейного типа. Эта модель определяется обыкновенным дифференциальным уравнением с большим параметром K . Основным результатом представлен в теореме, которая доказывает, что предложенная гладкая модель является приближительным к точной модели, которая называется локально явной моделью Прядко-Садовского при $K \rightarrow +\infty$. Поэтому для исследования некоторых систем релейного типа гладкая модель может использоваться также как точная модель. Полезность этой модели показана с помощью конкретного примера.

Ключевые слова: системы релейного типа, локально явная модель, гладкая модель.

УДК 519.872.1

П.Б. Абрамов

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина»,
Воронеж, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МАРКОВСКИХ ФОРМ С ВНЕШНИМИ ПОТОКАМИ СОБЫТИЙ

Аннотация. В статье приведен анализ современных сложных полумарковских моделей взаимодействия инфокоммуникационных систем и рассмотрен альтернативный подход на основе марковских форм с внешними потоками событий, позволяющий достаточно просто получить оценки стационарных вероятностей состояний процесса.

Ключевые слова: Модель, немарковский процесс, марковские формы, внешние потоки событий.

В настоящее время моделирование динамики сложных систем приобретает все большую актуальность. Разветвленность структуры инфокоммуникационных систем, их достаточно сложная архитектура и значительный объем передаваемого трафика требуют адекватной оценки возможностей подобных систем с целью минимизации риска потери информации. В особенности это актуально в том случае, когда функционирование систем происходит в условиях взаимного конфликта.

Модели, построенные на основе классических методов исследования операций, например марковские модели, подчас могут не вполне удовлетворять требованию адекватности. Например, одним из важнейших аспектов, как показано в [1-3], является учет последствий в потоках событий, определяющих динамику системы.

Для моделирования динамики систем с учетом рекуррентного характера потоков успешно применяются полумарковские модели. Они хорошо обоснованы в известных трудах, например [4,5]. К настоящему времени накоплен богатый опыт применения полумарковских моделей в сфере исследования информационного конфликта. Наиболее полное освещение достижений в этой области приведено в [6].

Следует отметить, что при всей универсальности и мощи аналитического аппарата полумарковских моделей получаемые соотношения весьма сложны, включают в себя кратные суммы и интегралы. Как правило,

нечасто удается получить расчетные зависимости для вероятностей состояний в аналитическом виде. Решение каждой из подобных задач является достаточно нетривиальным и может служить темой отдельного научного исследования. Существенно упрощает получение результата применение численных методов. Современные программные системы позволяют получить искомый результат на основе пошаговых алгоритмов.

Тем не менее, даже с учетом возможностей современной вычислительной техники разработать полумарковскую модель с количеством состояний больше десяти и получить на этой основе расчетные оценки весьма затруднительно. В этом случае попытка применения полумарковских моделей оказывается сопряжена с необходимостью снижения детализации исследуемого процесса на основе обобщения групп возможных состояний системы.

Кратко рассмотрим современный подход, системно изложенный в [6]. Предложено граф состояний конфликта строить в соответствии с множеством возможных состояний сторон. Граф состояний конфликта согласно [6] приведен на рисунке 1.

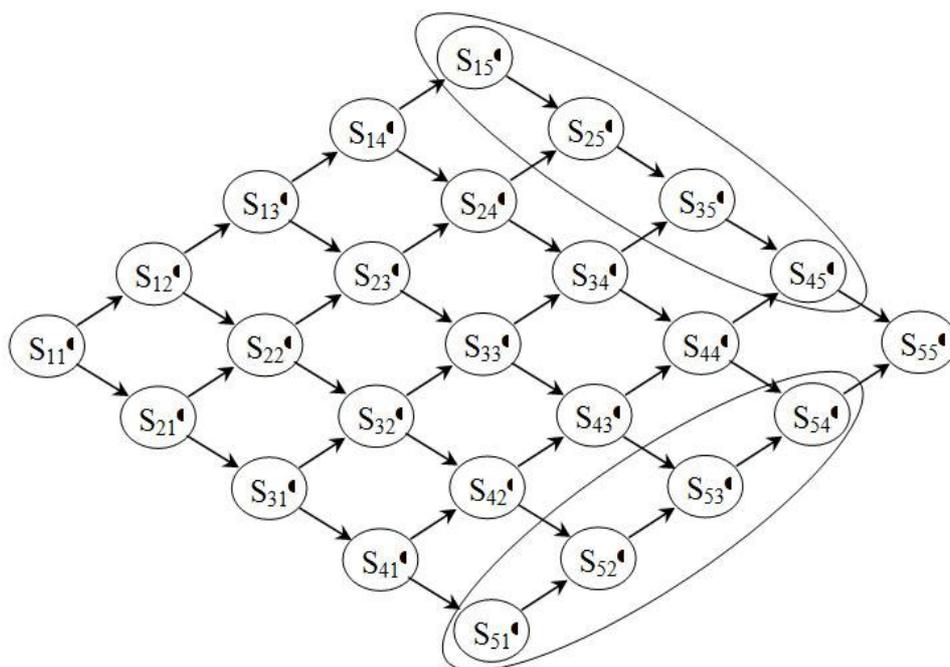


Рисунок 1 – Граф состояний информационного конфликта двух систем

Подмножество состояний S_{15} - S_{45} соответствует выигрышу одной из сторон (А), так как в этом подмножестве данная сторона закончила все этапы своей работы, а сторона В продолжает их выполнять. И наоборот, подмножество состояний S_{51} - S_{54} соответствует выигрышу стороны В. Отметим также, что состояние S_{11} определяет еще не начавшийся конфликт,

а состояние S_{55} является финальным состоянием, которое необходимо для завершения полумарковской модели процесса.

Для получения обозримого результата авторы предлагают прежде всего некоторыми методами теории графов свести граф на рис.1 к виду, представленному на рисунке 2.

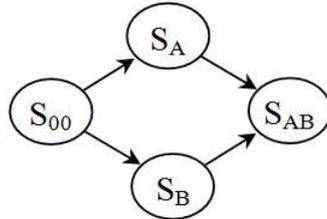


Рисунок 2 – Обобщенный граф состояний конфликта

Вероятности состояний $P_i(t)$ рассчитываются на основе функций восстановления $H_i(t)$ согласно следующему выражению:

$$P_i(t) = H_i(t) - \sum_{k, k \neq i} H_{ik}(t). \quad (1)$$

Функции восстановления $H_i(t)$ определяются на основе интервально-переходных вероятностей $\tilde{P}(i, \tau)$:

$$H_i(t) = \int_0^t \tilde{P}(i, \tau) d\tau. \quad (2)$$

Интервально-переходные вероятности могут быть найдены путем решения системы интегродифференциальных уравнений

$$\tilde{P}(i, t) = \sum_j P_{jk} \int_0^t \tilde{P}(i, \tau) \varphi_{ji}(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $\varphi_{ji}(t)$ представляют собой в явном виде плотности вероятности временных интервалов в потоках событий, а P_{jk} есть предельные значения вероятностей марковской цепи, вложенной в данный полумарковский процесс, которые в свою очередь следует предварительно найти с применением бесконечных интегралов [5]:

$$P_{jk} = \int \prod_{0 \leq i \neq k}^{\infty} (1 - F_{ji}(\tau)) dF_{jk}(\tau), \quad (4)$$

имея в виду под $F_{jk}(t)$ независимые функции распределения времени пребывания процесса в j -м состоянии до перехода в k -е состояние.

Решение же системы интегродифференциальных уравнений (3) в аналитическом виде может быть выполнено в операторной форме, с применением прямого и обратного преобразования Лапласа. Как известно, решение подобной задачи возможно лишь в некоторых случаях, поэтому чаще всего прибегают к численным алгоритмам интегрирования, с применением современных прикладных пакетов программ, как это и показано в монографии [6]. Следует особо отметить, что с возрастанием размерности графа сложность выражений (1) – (4) возрастает многократно.

Итак, всего лишь краткий обзор математического аппарата полумарковских процессов позволяет понять, что действительно для графов большой размерности получение аналитического решения, и даже получение оценок вероятностей состояний численными методами является достаточно сложной задачей.

Рассмотрим альтернативный подход.

Получить предельные, или стационарные значения вероятностей состояний для некоторого немарковского процесса более простым, чем полумарковская модель способом можно на основе изложенного в [7] метода. Он предусматривает пересчет интенсивностей рекуррентных потоков с целью их замены эквивалентными простейшими, с последующим проведением расчетов на основе марковских моделей.

Для каждого отдельно взятого потока событий

$$\lambda_{\text{эkv}} = A_{nm} \cdot K_{\text{корр}}, \quad (5)$$

где A_{nm} – интенсивность рекуррентного потока, $\lambda_{\text{эkv}}$ – интенсивность эквивалентного простейшего потока.

В настоящее время автором получены коэффициенты пересчета в предположении, что временные интервалы в потоке имеют гамма-распределение порядка K_{nd} . В монографии [7] приведены коэффициенты $K_{\text{корр}}$, полученные на моделях первого приближения с применением метода расширения пространства фазовых состояний. В таблице 1 приведены коэффициенты, полученные на полумарковских моделях малой сложности. Они совпадают до четвертого десятичного знака. Столбцы таблицы соответствуют различному порядку гамма-распределения, а строки – различным отношениям λ/A_{nm} интенсивности исходящих из данного состояния суммарного простейшего и рекуррентного потоков.

Таблица 1 – Десятичные мантиссы коэффициентов пересчета $K_{корр}$

$\frac{K_{пд}}{\lambda / \Lambda_{мин}}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,20	9524	9362	9280	9231	9199	9175	9157	9144	9133	9124	9116
0,40	9091	8778	8619	8523	8459	8412	8378	8351	8329	8311	8297
0,60	8696	8242	8011	7870	7776	7709	7658	7619	7587	7561	7539
0,80	8333	7750	7452	7270	7149	7061	6996	6944	6903	6869	6841
1,00	8000	7297	6938	6719	6572	6466	6387	6324	6275	6234	6199
2,00	6667	5510	4923	4568	4330	4160	4032	3932	3852	3787	3732
3,00	5714	4286	3580	3163	2887	2692	2547	2435	2346	2274	2214
4,00	5000	3418	2667	2235	1958	1765	1624	1517	1432	1364	1309
5,00	4444	2784	2030	1613	1352	1176	1050	0955	0882	0824	0777

Если из данного состояния выходят два рекуррентных потока, то коэффициенты для каждого из них находятся решением системы двух уравнений

$$\begin{aligned} K_{корр1} &= f_{Kn\partial 1}(K_{корр2} \cdot \Lambda_2 / \Lambda_1) \\ K_{корр2} &= f_{Kn\partial 2}(K_{корр1} \cdot \Lambda_1 / \Lambda_2) \end{aligned} \quad (6)$$

методом поочередной подстановки табличных значений. В случае трех рекуррентных потоков потребуется решить три уравнения и т.д. Промежуточные значения, отсутствующие в таблице, могут быть найдены на основе интерполирования значений в строках и столбцах.

После определения эквивалентных интенсивностей для каждого из состояний модели появляется возможность составить марковскую модель и определить стационарные значения вероятностей состояний. Метод дает совпадение результатов расчетов со сложными полумарковскими моделями до четвертого десятичного знака.

Однако, наличие поглощающего состояния S_{55} делает невозможным вычисление стационарных вероятностей состояний, поскольку все они будут стремиться к нулю. Изменим начальные допущения модели.

Предположим, что в конфликт вступает, участвует в нем и выходит из него не одна, а множество идентичных пар противоборствующих сторон. Тогда граф следует дополнить внешними потоками событий, а надобность в финальном состоянии S_{55} отпадает и структурный граф конфликта приобретает вид, приведенный на рисунке 3.

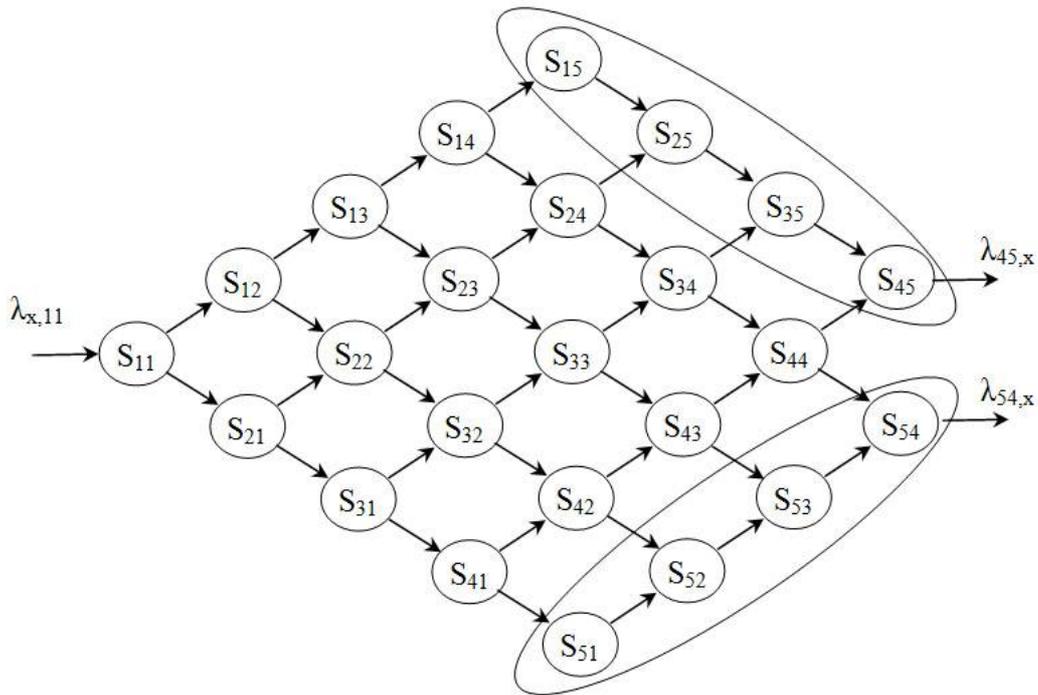


Рисунок 3 – Структурный граф конфликта с внешними потоками событий

Как и в моделях динамики средних, будем полагать одинаковой динамику элементов конфликтующего множества с каждой из сторон, а сами элементы независимыми друг от друга. Интенсивность потока $\lambda_{x,11}$ равна среднему количеству противоборствующих пар, вступающих в конфликт в единицу времени. Интенсивности $\lambda_{45,x}$ и $\lambda_{54,x}$ определяются как величины, обратные среднему времени завершения финальных этапов конфликта каждой из сторон, после чего соответствующая пара выходит из конфликта. Интенсивности прочих переходов определяются как и ранее.

Теперь можно полагать, что процесс является марковским, а потоки событий – простейшими (после пересчета интенсивностей).

Как показано в [7], в подобной модели на основе марковской формы обязательно с течением времени установится стационарный режим, независимо от значений интенсивностей внутренних и внешних потоков. Математические ожидания m_{ij} численностей состояний могут быть рассчитаны путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -(\lambda_{11,12} + \lambda_{11,21}) \cdot m_{11} = -\lambda_{x,11} \\ -(\lambda_{ij,i(j+1)} + \lambda_{ij,(i+1)j}) \cdot m_{ij} + \lambda_{(i-1)j,ij} \cdot m_{(i-1)j} + \lambda_{i(j-1),ij} \cdot m_{i(j-1)} = 0 \\ -\lambda_{45,x} \cdot m_{45} + \lambda_{35,45} \cdot m_{35} + \lambda_{44,45} \cdot m_{44} = 0 \\ -\lambda_{54,x} \cdot m_{54} + \lambda_{53,54} \cdot m_{53} + \lambda_{44,54} \cdot m_{44} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Замечательным свойством рассматриваемого стационарного режима является то, что отношения любых математических ожиданий, а также их сумм не зависят от интенсивности входящего в марковскую форму потока $\lambda_{x,11}$ [7]. Тогда в качестве вероятностной меры выигрыша той или иной стороны в конфликте, с учетом нормировки на выбранном подмножестве выигрышных состояний, могут быть приняты отношения:

$$P_A = \frac{\sum_i m_{i5}}{\sum_i m_{i5} + \sum_j m_{5j}}; \quad (8)$$

$$P_B = \frac{\sum_j m_{5j}}{\sum_i m_{i5} + \sum_j m_{5j}}.$$

Предложенная вероятностная мера приближена по смыслу к статистическому определению вероятности. Итог конфликта для каждой пары можно считать исходом очередного эксперимента, а количество пар, завершивших конфликт – количеством проведенных опытов. Оценки (8) в стационарном режиме не зависят от количества противоборствующих пар, принимающих участие в конфликте. Поэтому переход к бесконечному пределу в (8) сводится к вычислению этих же отношений для конечных значений сумм математических ожиданий m_{ij} .

Рассмотренный подход обладает рядом дополнительных преимуществ по сравнению с полумарковской моделью.

Поскольку исходный граф конфликта не подвергается обобщению, то модель позволяет оценивать вероятности пребывания сторон в тех или иных промежуточных состояниях конфликта. Для этого достаточно в (8) изменить условие нормировки в знаменателе, а в числителе подставить суммы математических ожиданий оцениваемых состояний.

Кроме того, предлагая процедуру вариации интенсивностей потоков событий, можно оценивать влияние, которое окажет какое-либо изменение параметров системы на исход конфликта. Если при этом состояниям присвоить весовые (штрафные) показатели, то имеется принципиальная возможность определения целевого функционала в аддитивной форме и решения на этой основе оптимизационных задач.

Библиографический список

1. Абрамов П.Б. Оценка параметров систем массового обслуживания при аппроксимации дисциплины обслуживания потоками Эрланга / П.Б.Абрамов, А.В.Леньшин // Вестник Воронежского института МВД России. — 2012. — № 2. — С.13-18.

2. Абрамов П.Б. Об одном подходе к оценке параметров многоканальных систем массового обслуживания с учетом последействия в потоках обслуженных заявок / П.Б.Абрамов, А.В.Леньшин // Вестник Воронежского института МВД России. — 2012. — № 3. — С.156-162.

3. Абрамов П.Б. Оценка параметров многоканальных систем массового обслуживания с учетом последействия в потоках обслуженных заявок / П.Б.Абрамов, А.В.Леньшин // Вестник воронежского института МВД России.— 2013. — №2.— С.130-135.

4. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В.Гнеденко, И.Н.Коваленко. — М.: Наука, 1987. — 336с .

5. Тихонов В.И. Марковские процессы. / В.И.Тихонов, М.А.Миронов. — М.: Сов.радио, 1977. — 488 с.

6. Модели информационного конфликта средств поиска и обнаружения: монография / под ред. Ю.Л.Козирацкого. — М.: Высшая школа, 2013. — 232 с.

7. Абрамов П.Б. Основы теории марковских форм с внешними потоками событий: монография / П.Б.Абрамов. — Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2014. — 185 с.

Р.В.Abramov

Modeling of non-Markovian processes of infocommunication systems interaction based on Markov forms with the external streams of events

Abstract. The article provides an analysis of today's complex semi-Markov models of infocommunication systems interaction, and alternative approach based on markovian forms with external streams of events is considered, which allows to obtain simply enough estimates of stationary probabilities of states of the process.

Keywords: Model, non-markovian process, markovian forms, external streams of events.

УДК 519.688, 51-74

М. Н. Аралов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Воронежский государственный технический университет". Россия, г.Воронеж.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Аннотация. В статье исследуются методы и алгоритмы расчета тепловых параметров твердого многослойного тела. Предложено использование открытых библиотек, для визуализации тепловых моделей интегральных микросхем. Рассмотрены вопросы повышения эффективности и надежности процесса обработки данных.

Ключевые слова: тепловое распределение, трехмерная сборка, OpenGL, TaoFramework

Введение. Моделирование физических процессов, протекающих внутри многослойного тела, является актуальной задачей для различных отраслей промышленности. В настоящее время слоистые материалы широко применяются в строительстве, машиностроении, приборостроении и прочих отраслях производства. К слоистым телам можно отнести самые различные предметы: стены современных зданий, вулканические породы, препреги и пр [1].

Сложные электронные компоненты тоже имеют слоистую структуру. Кристалл интегральной микросхемы чаще всего имеет три слоя (рисунок 1(а)). Современные технологии позволяют производить т.н. трехмерно-интегрированные микросхемы (далее 3D-IC). В корпусе таких микросхем располагаются несколько полупроводниковых пластин параллельно друг над другом (рисунок 1(б) и 1(в)). Такое увеличение степени интеграции обусловлено тенденцией к уменьшению габаритов и увеличению производительности электронных компонентов. Рост концентрации источников тепла приводит к появлению зон локального перегрева, что в свою очередь может вызвать дестабилизацию параметров, сбой работы и даже выход из строя конечного продукта.

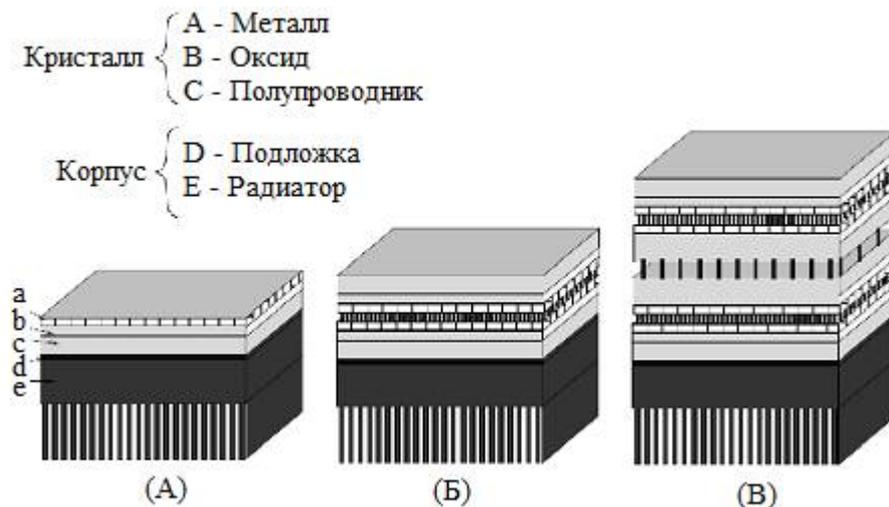


Рис. 1. (а) – планарная ИС; (б) – двуслойная 3D-ИС; (в) – четырехслойная 3D-ИС

Выявление сбоев работы после создания прототипа ведет к замедлению производства и дополнительным затратам на разработку, а локализация ошибки до появления прототипа возможна только при моделировании физических процессов внутри разрабатываемого устройства. Принимая во внимание критичность температурных факторов, тепловое моделирование становится важнейшим этапом проектирования современных цифровых устройств.

Постановка задачи. В рамках исследования необходимо рассмотреть математические подходы к моделированию тепловых параметров слоистых структур. Некоторые методы, наиболее подходящие для применения к 3D-ИС, следует реализовать в программном коде в виде процедур. На основе этих процедур необходимо создать матрицу теплового распределения, пригодную для визуализации. Полученную матрицу нужно визуализировать, используя открытые графические библиотеки.

Необходимыми входными данными для расчета тепловых параметров являются: теплоемкость, теплопроводность и плотность каждого элемента моделируемого объекта; координаты и мощность источников тепла; параметры окружающей среды. Параметры окружающей среды задаются в интерактивном режиме. Остальные параметры, в случае моделирования электронного компонента, можно получить на основе HDL-описания этого компонента [1,2].

Математические методы. Процесс теплопроводности в декартовой системе координат описывается уравнением Фурье-Кирхгофа:

$$Q_w(x, y, z, t, T) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Это уравнение связывает временные и пространственные изменения температуры в любой точке тела. Здесь ρ – плотность, c – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, Q_w – мощность внутренних источников тепла. Условия однозначности уравнения (1) содержат геометрические, физические, начальные и граничные условия.

Геометрические условия определяют форму и размеры тела, в котором протекает моделируемый процесс. Физические условия определяют характеристики тела ρ , c , λ . Начальные условия содержат распределение температуры на начальный момент времени: $t = 0: T = f(x, y, z)$ – в общем виде. При равномерном распределении температуры в теле начальное условие упрощается: $t=0: T=T_0=const$. Граничные условия определяют особенности протекания процесса на поверхности и могут быть заданы несколькими способами, описанными в [3].

Дифференциальное уравнение (1) вместе с условиями однозначности дает полную математическую формулировку краевой задачи теплопроводности. При решении конкретных краевых задач нестационарной теплопроводности можно, применяя методы математического моделирования, добиться существенного упрощения общей математической постановки [4].

Для моделирования теплофизических процессов в твердом теле, имеющем многослойную структуру, могут применяться такие математические методы, как разрывной метод Галеркина, метод на основе функции Грина и комбинированный метод вычисления, описанные в [4] и [5]. Данные методы, в зависимости от конкретной задачи, дают различные по точности и производительности результаты, поэтому для повышения эффективности процесса обработки данных целесообразно реализовать возможность выбора метода моделирования.

Программный комплекс. Структурная схема разработанного программного комплекса представлена на рисунке 2.

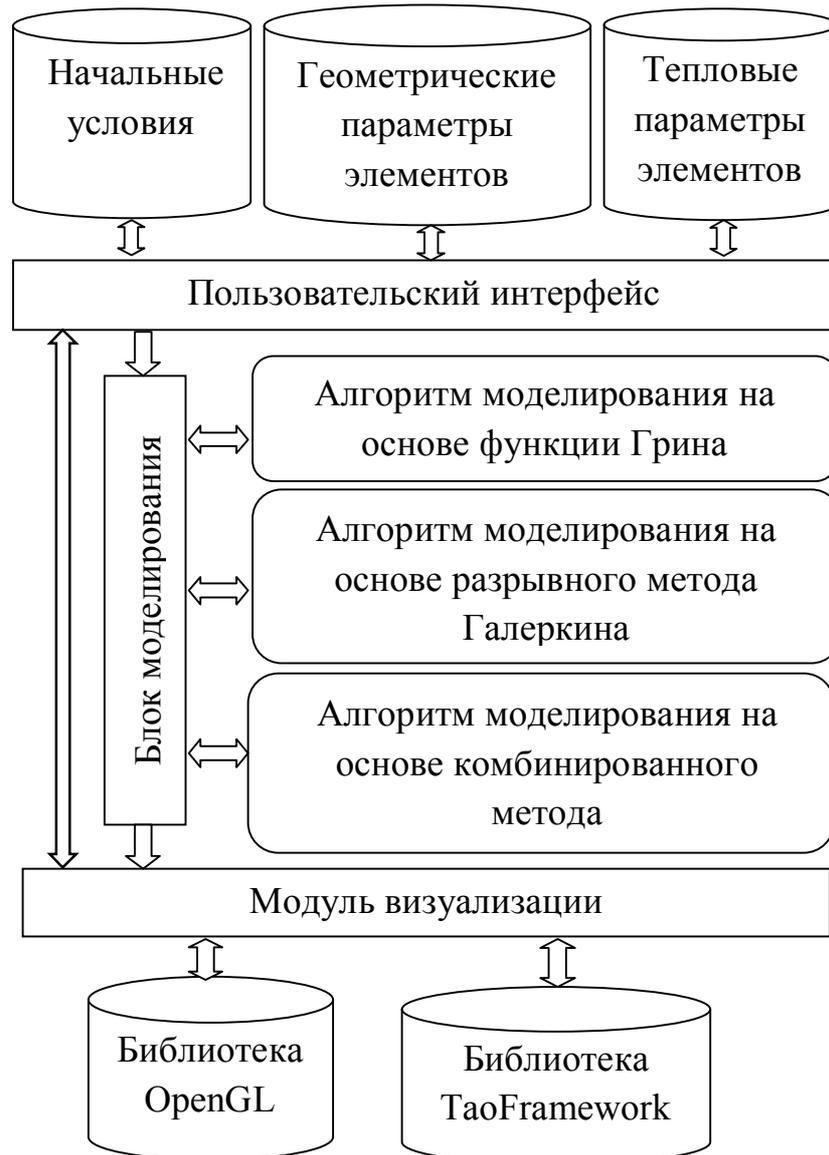


Рис. 2. Структура программного комплекса

К тепловым параметрам элементов относятся теплоемкость, теплопроводность и плотность. Геометрические параметры содержат данные о габаритах и расположении этих частей. Начальные условия – это параметры теплового распределения в начальный момент времени.

Блок пользовательского интерфейса отвечает за выбор метода моделирования, ввод параметров моделирования и вывод на экран термограммы и матрицы температур. Кроме прочего, здесь реализована функция сохранения полученных результатов в различных форматах.

Блок моделирования производит расчет матрицы температур на основе входных данных. Для моделирования может использоваться один из трех математических методов, описанных ранее.

Модуль визуализации получает матрицу распределения температуры в виде массива чисел и возвращает термограмму в графическом формате. Для обработки графических данных используются открытые библиотеки TaoFramework и OpenGL. Более подробно этот модуль описан в [6].

Проведение опытов и результаты моделирования. Для оценки работы разработанного программного комплекса использовалась ранняя модель микроконтроллера 1887BE4У, имеющая неисправности, которые приводили к образованию зон локального перегрева. Данный микроконтроллер – относительно не сложная ИС, массивы её тепловой модели имеют размерность 5x2711x3241 ячеек.

В качестве эталона для сравнения результатов моделирования и визуализации использовалась тепловизионная съемка работы одного из ранних прототипов микроконтроллера 1887BE4У

Моделирование на основе комбинированного метода заняло 1509 секунд реального времени. Процесс, связанный с построением матрицы температур занял порядка 650 Мб оперативной памяти ПК. Моделирование с применением функции Грина и разрывного метода Галеркина проходит быстрее и требует меньших ресурсов вычислительной техники, однако полученные термограммы имеют худшее качество. Более подробно результаты работы описанного программного комплекса приведены в [1] и [6].

Заключение. Используемые математические методы применимы для расчета теплового распределения. При создании специальных средств проектирования, следует реализовать возможность выбора математического алгоритма для повышения эффективности и надежности обработки данных. Для визуализации тепловых полей слоистого вещества вполне пригодны открытые библиотеки TaoFramework и OpenGL.

Библиографический список

1. Аралов М.Н., Ачкасов А.В., Барабанов В.Ф., Подвальный С.Л. Программная реализация многовариантного математического моделирования тепловых полей //Вестник ВГТУ.- 2015.- Том 11 №.1 – С. 32-34.
2. Барабанов В.Ф., Аралов М.Н. - Структура программной модели цифрового устройства - Информационные технологии моделирования и управления (ИТМУ): Научно-технический журнал, № 6 (84), с. 583-589.
3. Аралов М.Н., Барабанов В.Ф. Математические и программные средства моделирования теплового поля твердого тела слоистой структуры - Системы управления и информационные технологии, №2(60), 2015. – С. 4-8
4. Барабанов В.Ф., Аралов М.Н., Гребенникова Н.И. Математические методы моделирования тепловых полей в трехмерной сборке интегральных схем //ВестникВГТУ.- 2013.- Том 9 №.6-3 – С.55-57.
5. Барабанов В.Ф., Подвальный С.Л., Ачкасов А.В., Аралов М.Н. Методы и алгоритмы моделирования тепловых полей в трехмерной сборке интегральных схем //Радиотехника - 2014 - №6 – С.82-87.

6. Аралов М.Н., Барабанов А.В., Гребенникова Н.И. Визуализация тепловых полей с использованием библиотек OpenGL и TaoFramework // Вестник ВГТУ.- 2015.- Том 11 №.1– С.39-41.

Aralov M.N.

Simulation and visualization of thermal fields of multi-layer objects

Abstract. In article methods and algorithms of calculation of thermal parameters of a solid multi-layer body are researched. Use of open libraries, for visualization of thermal models of integrated microcircuits is offered. Questions of increase of efficiency and reliability of processing of data are considered.

Keywords. thermal distribution, 3D-IC, OpenGL, TaoFramework

УДК 004.81, 004.023, 519.712

С.Л. Блюмин, К.И. Сытник

ФГБОУ ВПО Липецкий государственный технический университет,
Липецк, Россия.

**НОВЫЙ ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ - ОТЖИГОВАЯ
ЭВОЛЮЦИЯ РОЯ**

Аннотация. В работе предлагается гибридный метод стохастической оптимизации, основанный на комбинировании метода имитации отжига, оптимизации роем частиц и генетического алгоритма; проводится сравнение с другими популяционными методами на тестовых функциях многомерной непрерывной оптимизации.

Ключевые слова: эволюционные вычисления; глобальная непрерывная оптимизация; биоинспирированные алгоритмы; отжигровая эволюция роя.

Введение

Существуют различные методы оптимизации, созданные по образу существующих в природе биологических систем, это метод роя частиц, муравьиный алгоритм, пчелиный алгоритм и другие. Идея таких алгоритмов заключается в практическом использовании (в аспекте автоматизированной оптимизации) принципов, отработанных природой за долгие годы эволюции. С использованием такого подхода могут быть созданы эффективные способы решения множества практических задач в самых разных сферах, например, при принятии управленческих решений, построении математических моделей, прогнозировании ситуаций, анализе данных.

Как правило, данные алгоритмы функционируют в дискретном времени $t \in \mathbb{N}$, которое представляет собой номер итерации, при $t=0$ эволюционирующая популяция решений X^0 инициализируется некоторым внешним воздействием, при $t > 0$ популяция преобразуется согласно модели эволюции: $X^{t+1} = OX(X^t)$.

Предлагается новый гибридный алгоритм оптимизации - AES (Annealed evolution of swarm, Отжиговая эволюция роя), сочетающий элементы имитации отжига (SA), роя частиц (PSO) и генетического алгоритма (GA) [1,2].

Инициализация ($t = 0$):

В пространстве размерности n инициализируется популяция решений (рой частиц) размером m , разделённая на k ниш (субпопуляций), при обновлении топологии частицы различных ниш не связываются.

Для каждой частицы определяется случайная позиция и скорость.

Шаг алгоритма ($t > 0$):

Для каждой частицы вычисляется функция приспособленности (ФП).

Для каждой частицы определяется соседнее (согласно топологии и принадлежности нише) решение \bar{I}^t с лучшим значением ФП.

Для каждого измерения поискового пространства d каждой частицы i выполняются следующие шаги:

Производится пробное изменение координаты точки согласно методу имитации отжига

$$x'^{t+1} = x^t + \text{Sign}(\text{rnd} - \frac{1}{2}) \cdot T^t \cdot ((1 + 1/T^t)^{(2\text{rnd}-1)} - 1), \quad (1)$$

здесь и далее $\text{rnd} \in [0;1)$ - равномерно распределённая случайная величина. Затем проверяется и при необходимости корректируется выполнение ограничений.

Соответственно вероятности

$$\begin{cases} d = F(x'^{t+1}) - F(x^t), \\ \text{если } e^{-d/T^t} \geq \text{rnd}, \text{ то} \\ x^{t+1} = x'^{t+1}, \\ \text{иначе } x^{t+1} = x^t. \end{cases} \quad (2)$$

выполняется изменение каждой координаты вектора \bar{x}^{t+1} по методу роя частиц

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{вычислить центр и радиус} \\
 \text{гиперсферы, окружающей } x^t : \\
 g_c^{t+1} = x^t + \phi \cdot \text{rnd} \cdot (b^t + l^t - 2x^t)/3, \\
 g_r^{t+1} = |g_c^{t+1} - x^t|; \\
 \text{взять точку в гиперсфере,} \\
 x' = g_c^{t+1} + g_r^{t+1} \cdot (2\text{rnd} - 1), \\
 \text{вычислить новую скорость} \\
 v^{t+1} = \omega \cdot v^t + x' - x^t; \\
 \text{вычислить новые координаты} \\
 x^{t+1} = x' + \omega \cdot v^t.
 \end{array} \right. \quad (3)$$

и проверяется выполнение ограничений.

При улучшении ФП достигнутой лучшей позиции частицы \vec{b}^{t+1} обновляется.

Обновляются адаптивным методом [1] топологии ниш, в которых произошло улучшение глобальной оценки $f(\bar{x}^{t+1})$.

Производится скрещивание

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mu/2 \text{ раз выбираются родители} \\
 p1, p2; \text{ генерируется ген потомка} \\
 x' \in [\min(x^{p1}, x^{p2}), \max(x^{p1}, x^{p2})]
 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\text{и отбор} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{заменить худшие } \lambda \\
 \text{родительских решений} \\
 \text{лучшими потомками.}
 \end{array} \right. \quad (5)$$

Для определения универсальности и эффективности нового метода с помощью вычислительного эксперимента было проведено его сравнение со следующими стохастическими методами:

- ABC (Artificial Bee Colony) - алгоритм искусственной пчелосемьи [3];
- ACOg (Ant Colony Optimisation) - непрерывный муравьиный алгоритм [4];
- BA (Bats Algorithm) - алгоритм летучих мышей [5];
- CMA-ES (Covariation Matrix Adaptation Evolution Strategy) - эволюционная стратегия с адаптацией матрицы ковариаций [6];
- FSS (Fish School Search) - оптимизация косяком рыб [7];
- PSO (Particle Swarm Optimisation) - оптимизация роем частиц [8];
- SA (Simulated Annealing) - метод имитации отжига [9];
- SbPPA (Strawberry Plant Propagation Algorithm) - алгоритм земляничной поляны [10].

Также сравнивались методы, обычно применяемые для локальной оптимизации: CG (сопряжённых градиентов) [11], L-BFGS (Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно) [12] и LM (Левенберга-Марквардта) [13], стартующие из случайной точки.

Проводилась минимизация на шести тестовых функциях (таблица 1), ограничения поискового пространства и интервалы инициализации алгоритмов приведены в таблице 2. Поиск проводился для 30 измерений, размер популяции для каждого из алгоритмов был равен 100 решениям. Было проведено 100 испытаний, в каждом из них поиск производился до истечения заданного для каждой функции времени.

Функция Розенброка представляет собой унимодальную овражную функцию, остальные содержат много локальных оптимумов. Глобальный оптимум для всех функций достигается в точке $x_i = 1$ и равен 0.

Таблица 1: Тестовые функции и использованные параметры

Функция	Формула
Розенброка [14]	$f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} [100 \cdot (x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2]$
Растригина [15]	$f_2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - 1)^2 - 10 \cdot \cos(2\pi(x_i - 1))] +$
Гриванка [16]	$f_3 = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - 1)^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)$
Экли [17]	$f_4 = -20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2}\right) -$ $\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi(x_i - 1))\right) + 20 + e$
Швефеля1.2 [18]	$f_5 = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^i (x_j - 1))^2$
Сфера [19]	$f_6 = \sum_{i=1}^n (1 - x_i)^2$

Таблица 2. Использованные параметры для тестовых функций

Функция	Пространство поиска	Пространство инициализации	Лимит времени
Розенброка	- 30;30	15;30	60с
Растригина	- 5.12;5.12	2.56;5.12	20с
Гриванка	- 600;600	300;600	20с
Экли	- 32;32	16;32	60с
Швефеля 1.2	- 100;100	50;100	40с
Сфера	- 25;25	12.5;25	30с

В итоговой таблице 3 приведены результаты тестирования универсальности методов. Число k_u означает количество успешно

решённых (со средней точностью меньше 10^{-6}) тестовых функций. Чем больше это число, тем универсальнее метод оптимизации.

Таблица 3: Сравнение универсальности методов

Метод	ABC	ACOr	BA	CMA-ES	FSS	PSO	SA	SbPPA	CG	LM	L-BFGS	AES
k_u	4	1	0	4	0	4	1	0	5	2	5	6

Таким образом, достаточно универсальными оказались методы ABC, CMA-ES, PSO, хорошо проявили себя на данных функциях методы CG и L-BFGS, стартующие из случайной точки, однако методу LM не удалось достичь подобного результата. Достичь необходимой точности на всех шести функциях удалось только разработанному методу AES, что подтверждает его эффективность и универсальность. Полученный гибридный алгоритм был успешно применён в решении задачи оптимизации многосменных рабочих графиков [20,21,22].

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках перечня научно-исследовательских работ базовой части государственного задания, проект № 970.

Библиографический список

1. Сытник К. И. Particle swarm optimization in details // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2014. № 3(37). С. 44–48.
2. Сытник К.И. Модификации генетического алгоритма и метода имитации отжига // Информационные технологии моделирования и управления. 2013. Т. 83, № 5. С. 454–460.
3. Karaboga, D. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization. Technical Report TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005
4. Штовба, С. Д. Муравьиные алгоритмы // Математика в приложениях, 4 (4). 2004 С. 70-75
5. Xin-She Yang Department of Engineering, University of Cambridge, Trumpington Street, Cambridge CB2 1PZ, UK. 2010.
6. Hansen, N. and Ostermeier, A. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies, *Evolutionary Computation*, 9 (2), 2001, Pp. 159-195
7. Bastos, F. and Carmelo, J. A. and Lima, N. and Fernando, B. A Novel Search Algorithm based on Fish School Behavior // IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2008, Cingapura
8. Clerc M. Standard Particle Swarm Optimisation. From 2006 to 2011 [Электронный ресурс]. 2011. Режим доступа: http://clerc.maurice.free.fr/ps0/SPSO_descriptions.pdf.
9. Лопатин А.С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. № 220. С. 133–149. Вып. 1.
10. Sadati N., Zamani M., Mahdavian H. R. F. Hybrid particle swarm-based-simulated annealing optimization techniques // IEEE Industrial Electronics, IECON 2006 - 32nd Annual Conference on. Paris: 2006. Pp. 644–648.

11. William W. H, Hongchao Z. *The Limited Memory Conjugate Gradient Method*, SIAM Journal on Optimization, 23. 2013, Pp. 2150-2168
12. Dong C Liu and Jorge Nocedal. On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Mathematical programming*, 45(1-3):503–528, 1989.
13. Nocedal, Jorge; Wright, Stephen J. *Numerical Optimization*, 2nd Edition. Springer. 2006
14. Rosenbrock H.H. An automatic method for finding the greatest or least value of a function // *Computer Journal*. 1960. no. 3. Pp. 175–184.
15. Растринин Л.А. Системы экстремального управления. Москва: Наука, 1974. С. 632.
16. Back T., Fogel D., Michalewicz Z. *Handbook of Evolutionary Computation*. New York: Institute of Physics Publishing Ltd, Bristol and Oxford University Press, 1997. P. 1130.
17. Ackley D. An empirical study of bit vector function optimization // *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*. 1987. Pp. 170–215.
18. Schwefel H. *Evolution and Optimum Seeking*. New York: John Wiley and Sons, 1995. P. 456.
19. De Jong K. An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems. Ph.D. thesis / Department of Computer and Communication Sciences, University of Michigan. Ann Arbor, 1975.
20. Сытник К.И. Разработка структуры системы оптимизации многосменных рабочих графиков // *Управление большими системами: материалы IX Всероссийской школы-конференции молодых учёных*. — Том 1. Тамбов - Липецк: изд-во Першина Р.В. 2012. С. 114-117.
21. Блюмин С.Л., Сытник К.И. Составление и оптимизация графиков работ. М.: ОФАП, 2011. Госрегистрация № 50201150668 от 27.04.2011.
22. Сытник К.И. ОРГ (Оптимизация рабочих графиков). М.: ФГБУ ФИПС, 2015. Госрегистрация № 2015613851 от 26.03.2015.

~ S.L. Blyumin, K. I. Sytnik

~ **A new hybrid optimization method – annealed evolution of the swarm**

~ **Abstract.** A new hybrid stochastic optimization method based on a combination of the method of simulated annealing, particle swarm optimization and genetic algorithm is proposed in this paper. Population methods effectiveness are compared on the set of functions continuous multidimensional optimization.

~ **Keywords:** evolutionary computation; global continuous optimization; bioinspired algorithms; annealed evolution of the swarm.

УДК 519.854

Г.О. Бормотова

ГОУ ВПО Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ РАЗБИЕНИЙ*

Аннотация. Рассматривается оптимизационная задача, в которой аргументом функции является разбиение некоторого множества. Анализируется сходимость генетических алгоритмов с разными видами кроссоверов для оптимизации двух модельных функций.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, генетический алгоритм, разбиение множества.

**Работа поддержана грантом РФФИ 13-07-97519.*

Введение

Разбиение множества – это набор его попарно не пересекающихся подмножеств, вместе составляющих исходное множество. Задача разбиения множества возникает достаточно часто: начиная от разбиения группы учеников на звенья для работы над коллективными проектами [1] и заканчивая вариациями классической задачи разбиения графа (например, [2]), включающими раскраску графа, проектирование локальной сети, распараллеливание алгоритмов. Поиск разбиения, в каком-то смысле более привлекательного, чем другие, является задачей дискретной (комбинаторной) оптимизации. Как и для других задач этой области, сложность представляет астрономически большое количество вариантов перебора и отсутствие привычных и хорошо исследованных конструкций: носитель функции является алгебраической структурой, на которой задано отношение включения и ничего больше. Применение генетического алгоритма для решения задач комбинаторной оптимизации не является чем-то из ряда вон выходящим [3], однако для задачи оптимального разбиения он не рассматривался в доступных нам источниках.

Интерес авторов к данной теме возник из практического интереса разбиения алфавита в задачах, связанных с информационным поиском [4, 5]. При первом столкновении с оптимизацией на необычном множестве был выбран генетический алгоритм как метод, справляющийся там, где непонятно, как решать задачу. Тогда же был предложен специальный вид

кроссинговера. Когда же подобная задача возникла повторно, стало понятно, что, во-первых, оптимизация функции, заданной на множестве разбиений, представляет задачу самостоятельной научной ценности, и, во-вторых, требуется более тщательный анализ методов ее решения.

В данной работе рассматривается решение задачи оптимизации на множестве разбиений при помощи генетического алгоритма. В ходе работы автор нашел еще несколько перспективных подходов, которые планируется исследовать в дальнейших работах.

1. Постановка задачи

Дано конечное n -элементное множество A (алфавит). Рассматриваются всевозможные разбиения этого множества на k непустых подмножеств. Количество таких разбиений выражается числом Стирлинга второго рода. Для названных выше практических задач мощность исходного алфавита будет составлять 100-200 символов (или больше), количество элементов разбиения k – около 10. Таким образом, мы имеем $\sim 10^{193}$ вариантов разбиений.

В случаях, когда оптимизируемая функция задана аналитически, можно попробовать разработать специальный алгоритм решения задачи. Таковы методы многих задач комбинаторной оптимизации. Однако, для [4,5] построить вид функции затруднительно, значения вычисляются экспериментально. Поэтому остается предположить, что функция ведет себя неким естественным образом, сопоставляя похожим значениям аргумента близкие значения отклика. При этом вполне можно ожидать наличия множественных локальных оптимумов.

Для опытов были выбраны две модельных функции, для которых решение задачи известно. Первая возвращает максимальный по всем подмножествам разброс номеров символов алфавита. Для придания задаче дополнительной симметрии, номера "закольцованы", так что первый и последний символы алфавита считаются следующими один за другим. Если рассмотреть первые десять букв русского алфавита, то оптимальными разбиениями на три подмножества будут $\{\{A,B,V\}, \{Г,Д,Е,Ж\}, \{З,И,К\}\}$, $\{\{A,B,V,Г\}, \{Д,Е,Ж\}, \{З,И,К\}\}$, так же как и $\{\{B,Г,Д\}, \{Е,Ж,З,И\}, \{К,А,Б\}\}$ (значение функции равно трем), а разбиение $\{\{A,B,E\}, \{B,Д\}, \{Г,Ж,З,И,К\}\}$ будет соответствовать значению функции, равному шести (номер буквы 'Г' – четыре, буквы 'К' – десять, разница – шесть).

Вторая функция решает задачу, разбиения множества чисел на группы приблизительно одинакового суммарного веса. Функция возвращает максимальный вес подмножества из разбиения, таким образом минимизация функции выравнивает веса подмножеств. Указанную задачу можно формализовать как задачу линейного программирования и решить соответствующими методами, например, венгерским.

Для полноценной трактовки результатов заметим здесь, что незначительное изменение разбиение (переброс одного элемента из подмножества i в подмножество j) для второй функции будет иметь ограниченное приращение функции, а для первой – вплоть до максимально возможного. Кроме того, первая функция имеет много глобально-оптимальных решений, а вторая (как правило) – единственный оптимум.

Общая структура генетического алгоритма включает в себя выбор способа кодирования решения, начальную инициализацию популяции, выбор схемы скрещивания, собственно оператор скрещивания (кроссовер), оператор мутации, замена текущей популяции новой популяцией и условие остановки итерационного метода. Опишем вкратце схему и вариации алгоритма, исследованные в данной работе.

2. Общая структура алгоритма

2.1. Способ кодирования

Для алфавита мощностью n естественным способом кодирования будет представление разбиения вектором из n элементов, каждый из которых обозначает номер подмножества, которому элемент принадлежит. Так, разбиение $\{\{A, B, V\}, \{G, D, E, J\}, \{Z, I, K\}\}$ будет кодироваться вектором 1112223333, а разбиение $\{\{A, B, E\}, \{V, D\}, \{G, J, Z, I, K\}\}$ – вектором 1123213333.

Однако, в силу неупорядоченного характера подмножеств внутри разбиения, кодирование является неоднозначным. Так, вектор 221312333 кодирует разбиение $\{\{V, D\}, \{A, B, E\}, \{G, J, Z, I, K\}\}$, в точности совпадающее с предыдущим названным. Именно эта особенность кодирования разбиений послужила основой предложенного в [4] модифицированного кроссовера, полезность которого является основным предметом исследования данной работы.

2.2. Формирование начальной популяции

Для формирования начальной популяции мы использовали генератор случайных чисел для каждого элемента кодирующего вектора. К недостаткам метода можно отнести то, что не все разбиения входят в построенную таким образом выборку равновероятно: приоритет у разбиений, в которых мощности подмножеств приблизительно равны. Влияние этого фактора на оптимизацию не является предметом данной работы. Обеспечение же равной вероятности при генерации для всех возможных разбиений существенно усложнит программный код.

2.3. Выбор схемы скрещивания

В качестве схемы скрещивания использовался случайный отбор пары для скрещивания. К скрещиванию допускалось фиксированное количество лучших особей, полученных на предыдущей итерации.

В качестве механизма, побуждающего лучших особей давать больше потомства, использовался следующий метод. В зависимости от рейтинга особи в популяции определялось максимальное количество потомков, которое особь может оставить (но не менее одного). При исчерпании заданного количества скрещиваний, особь исключалась из дальнейшего процесса размножения. Нам кажется, этот способ дает более слабое преимущество высокоранговым особям, чем увеличение вероятности отбора по сравнению с другими экземплярами в популяции, что позволяет снизить риск попадания в локальный оптимум.

2.4. Оператор скрещивания

Однородный кроссовер – это оператор скрещивания, который для каждого элемента дочернего вектора случайно и равновероятно выбирает ген одного из родителей.

Вследствие неоднозначности кодирования разбиения при использовании кроссовера может возникнуть парадоксальная ситуация, когда два идентичных родителя производят совершенно непохожее на них потомство. Пусть, например, используется разбиение 6-символьного алфавита на два множества и родители закодированы следующим образом: 112222 и 221111. Разбиения совпадают. Результатом же выполнения скрещивания может быть любое разбиение, вероятнее всего – не совпадающее с родительскими. Для этого в [4] было предложено использовать модифицированный кроссовер, предварительно выполняющий перенумерацию множеств с тем, чтобы расстояние Хэмминга между векторами стало минимальным. Для этого строится матрица a_{ij} , элементы которой равны количеству позиций, в который первый вектор равен i , а второй – j . Решение задачи о назначениях для этой матрицы позволит выбрать перестановку номеров множеств, максимально приближающую родительские векторы друг к другу. Обозначим для ясности, что отобранные на предыдущем шаге разбиения при этом не изменяются, то есть речь не идет об использовании инбридинга или аутбридинга, относящихся к выбору системы скрещивания, а не оператора скрещивания. Применение описанного перекодирования перед выполнением однородного кроссовера мы назовем модифицированным однородным кроссовером.

Если в результате пересечения генов получился вырожденный потомок (какое-то из подмножеств пусто), использовался оператор мутации.

Когда опыты показали плохую сходимость предложенной модификации, было решено попробовать использовать двухточечный кроссовер [3], в котором кусочки генома родителей выходят в дочерний непрерывными фрагментами: элементы $1..L$ от родителя один, затем $L+1..R$ – от родителя два, и $R+1..n$ – снова от первого. Соответственно, если вместе с двухточечным кроссовером будет использоваться перекодирование, мы будем называть оператор модифицированным двухточечным кроссовером.

2.5. Замена текущей популяции новой

Как было описано в п. 2.3, популяция следующей итерации формируется из нескольких лучших особей предыдущей и лучших из сгенерированных на этом шаге потомков. В некоторых тестах количества фиксированы (количество элитных особей, сохраняющихся в популяции, количество допущенных к размножению особей и количество потомков, из которых будет произведен отбор допущенных к размножению на следующем шаге).

В качестве борьбы с преждевременной сходимостью мы, по рекомендации [6], для части опытов использовали адаптивно изменяющиеся параметры количества элитных особей (логарифмически убывающее в соответствии с количеством шагов, на которых не было улучшения оптимального значения функции) и вероятности мутации (линейно росла с убыванием дисперсии значения функции в популяции).

2.6. Условие остановки итерационного метода

Поскольку методы тестировались для модельных функций, остановка производилась при достижении оптимального значения, либо при превышении количеством итераций заданного заранее предела.

2.7. О программной реализации метода

Программа для тестов была написана на языке C++ в парадигме объектно-ориентированного программирования. Для хранения популяции использовался STL-контейнер `multimap`, позволяющий отбирать элементы по возрастанию значения ключа (в качестве которого использовалось значение функции на разбиении).

Результаты прогонов записывались в текстовый файл в виде SQL-предложений `INSERT INTO`, что позволило загрузить данные в БД для последующей обработки и анализа.

Решение задачи о назначениях было взято в [7].

4. Результаты экспериментов

Первая серия экспериментов проводилась для первой модельной функции с использованием однородного кроссовера. На каждом шаге алгоритма формировалась расширенная популяция при помощи случайного отбора пары для скрещивания. Популяция следующего шага формировалась из нескольких лучших представителей предыдущей, дополненных лучшими представителями расширенной популяции.

Практически все проведенные опыты (для алфавитов мощностью 20, 100 и 200 символов) показали, что модифицированный вариант кроссовера несколько замедляет сходимость метода. На рис.1. показаны наиболее типичные результаты опытов. Всего в этой серии было проведено 16 запусков.

Вторая серия опытов (примерно четыре десятка) была проведена для второй модельной функции (минимизация максимального веса подмножества)

и показала аналогичные результаты (сходимость приблизительно одинаковая, но для немодифицированного кроссовера чуть выше).

а)



б)

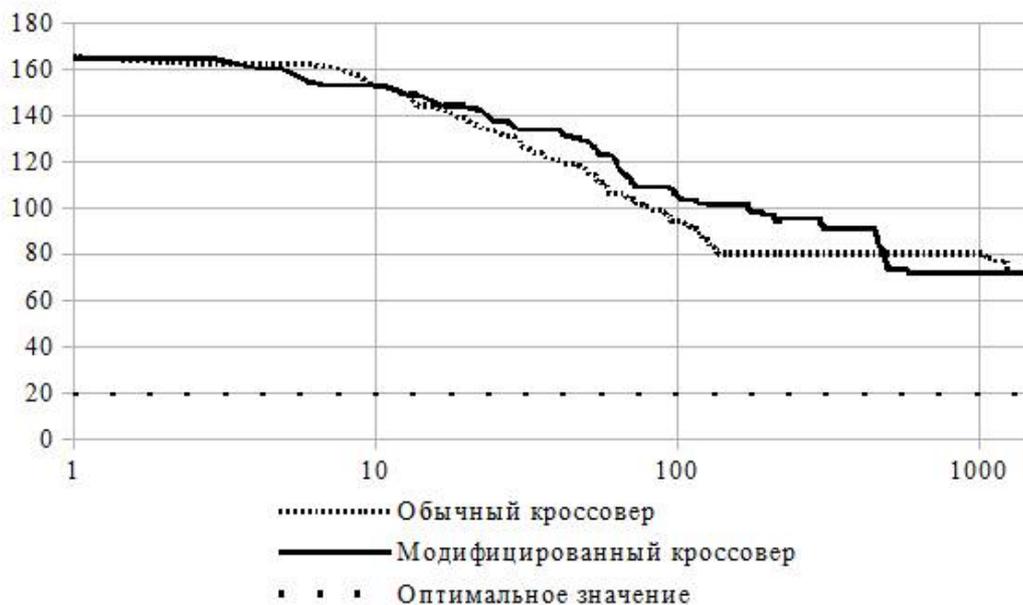


Рис.1. Функция 1, однородный кроссовер, без эвристик
а) Разбиение 100-символьного алфавита на 5 подмножеств
б) Разбиение 200-символьного алфавита на 10 подмножеств

Тестировались популяции разного объема (от 100 до 10000 экземпляров). В целом, использование популяции большого объема менее выгодно, чем использование временного резерва для нескольких прогонов метода с популяцией меньшего объема.

Предположение о том, что немодифицированный метод работает лучше за счет расширения количества вариантов заставило попробовать модифицированный метод с более высокой вероятностью мутации. Но и это не дало положительных результатов.

Третья серия (четырнадцать опытов, большие размеры популяций, разные вероятности мутаций) оптимизировала функцию два с использованием двухточечного кроссовера и по-прежнему показала отсутствие преимуществ модифицированного кроссовера.

В следующей серии опытов использовались адаптивно изменяющиеся параметры количества элитных особей и вероятности мутации (см. п. 2.5). Как и ранее, небольшой размер популяции (100-200 особей) показал преимущество по времени перед десятикратным (1000 особей). Усредненные значения для функции два представлены на рис.2. Таким образом и здесь мы видим, что модифицированный метод не дает преимущества в сходимости.

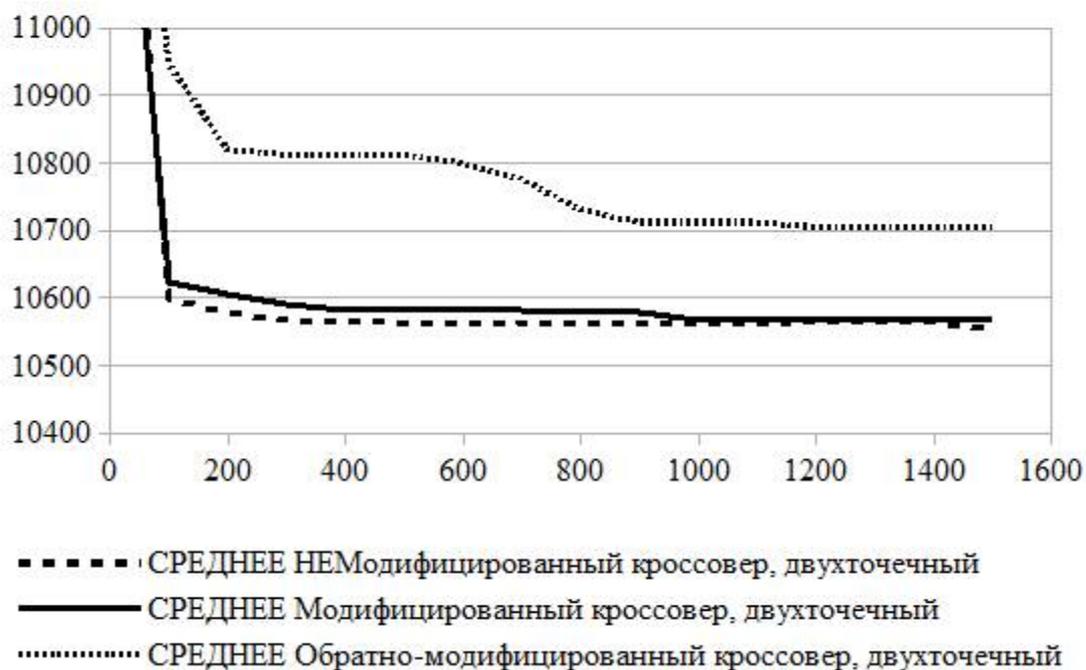


Рис.2. Функция два, разбиение 200-символьного алфавита на 10 подмножеств

Пятая серия опытов использовала адаптивные параметры отбора и мутации для функции один, но показала аналогичное поведение.

При подобной парадоксальности результата авторы провели еще одну серию тестов с использованием обратно-модифицированного кроссовера, использующего перекодирование, максимизирующее расстояние по

Хэммингу между скрещиваемыми векторами. Чуда не случилось, сходимость метода ухудшилась (см. рис. 2).

5. Выводы

На основе проведенных опытов для двух модельных функций с разными видами кроссоверов, объемами популяций и вероятностями мутаций использование модифицированного кроссовера не приводит к увеличению скорости сходимости генетического алгоритма.

При этом генетический алгоритм применим в практических задачах для поиска более хорошего (пусть не всегда оптимального) решения.

В дальнейшей работе авторы надеются формально очертить класс функций на разбиениях, подходящих для оптимизации лучшей, чем полный перебор, и разработать специальный метод оптимизации таких функций с использованием понятия расстояния на множестве разбиений.

Библиографический список

1. Р. А. Иванов Оптимизация поиска минимума информационной энтропии на конфигурациях разбиения при реализации ИКТ группового сотрудничества в процессе обучения // Ярославский педагогический вестник, № 3, 2012, Том III (Естественные науки). С. 34-38.
2. В.А. Иващенко, Р.Ю. Лопаткин, В.В. Куприенко Способ выбора алгоритма разбиения графа для распределенных вычислений // Математические машины и системы, 2011, №4. С.31-38.
3. Д.И. Батищев, Е.А. Неймарк, Н.В. Старостин Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в прикладной математике». Нижний Новгород, 2007.
4. Погодаев А.К, Федоркова Г.О. Нестрогое соединение реляционных таблиц: хеширование по сигнатуре // Системы управления и информационные технологии, 2005, № 2(19). С.93-95.
5. Бормотова Г.О., Погодаев А.К. Техники сокращения объема индекса для задач нечеткого поиска в базах данных // Системы управления и информационные технологии, №4(58), 2014. – С. 26-29.
6. А. Митин Генетический алгоритм: боремся с преждевременной сходимостью // Сетевое издание Habrahabr.ru. URL: <http://habrahabr.ru/post/122222/> (31.07.2015)
7. Венгерский алгоритм решения задачи о назначениях. Ред. М. Иванов URL: http://e-maxx.ru/algo/assignment_hungary (31.07.2015)

~ G.O. Bormotova

~ **On an applying of genetic algorithms to the optimization on a set of partitions domain**

~ **Abstract.** In our work we discuss the optimization problem with function which domain is a set of partitions of some alphabet. We analyze the convergence rate of two model function optimization depending on crossover type.

~ **Keywords:** combinatorial optimization, genetic algorithm, partition of a set.

УДК 664.723.681.51

Е.В. Воронова

ФГБОУ ВПО Воронежский государственный университет, Воронеж,
Россия**РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОТЫ
ОТ ЛОКАЛЬНОГО ОЧАГА САМОСОГРЕВАНИЯ ЗЕРНА С
ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Аннотация. В статье приведён подход, который получил название метода функциональных преобразований, применяющийся при решении краевых задач теплопроводности в области с произвольно движущейся границей для обнаружения очагов самосогревания при хранении зерна в производственных условиях.

Ключевые слова: краевая задача, очаг самосогревания, теплопроводность, температура, зерно.

При решении краевых задач теплопроводности в области с произвольно движущейся границей применяется подход, который получил название метода функциональных преобразований [1]. Этот подход, с одной стороны, дает возможность значительно расширить число конкретных законов движения границы, для которых возможно получить аналитическое решение задачи, и, с другой стороны, рассмотреть общий закон движения границы и соответствующее решение задачи в форме, отличной от выражений, полученных методом дифференциальных рядов[2].

Для краевых задач обобщенного типа можно построить функциональное преобразование специального вида, основанное на введении подвижной системы координат, в которой подвижная граница становится неподвижной. При этом исходное уравнение теплопроводности приводится к виду, допускающему в ряде случаев применение классического метода разделения переменных.

Рассмотрим расширяющуюся область, форма которой – бесконечная пластина. Толщина пластины меняется со временем, сохраняя подобие. В этом случае задача теплопроводности сводится к задаче с подвижной границей. Схема процесса развития очага самосогревания приведена на рис. 1.

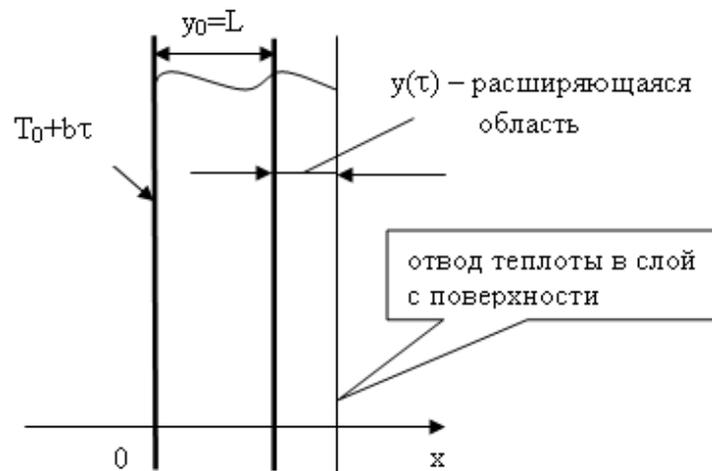


Рис.1 Схема процесса развития очага самосогревания

Допущения при составлении математической модели: температура в слое зерна распределена по высоте слоя, по другим координатам – локальная, теплофизические переменные – постоянные, граница очага самосогревания – подвижная, температура в центре очага самосогревания возрастает по линейному закону

Метод перевода краевой задачи обобщенного типа в классическую. В интервале времени $\tau_1 < \tau \leq \tau_2$ действует источник теплоты с линейным повышением температуры поверхности очага самосогревания $T_n = T_0 + b \cdot \tau$, где τ - время, ч; T_n , T_0 – соответственно температура на поверхности и в центре очага самосогревания, К; b – скорость расширения очага самосогревания, м/ч.

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad 0 < x < y(\tau), \quad \tau > 0; \quad [y(0) = y_0 \geq 0] \quad (1)$$

с начальным условием:

$$T(x, 0) = T_n; \quad (2)$$

и краевыми условиями:

$$T(0, \tau) = T_0 + b \tau, \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=y(\tau)} = \alpha (T|_{x=y(\tau)} - T_c), \quad (4)$$

где $T(x, \tau)$ – температура, К; x – пространственная координата (координата поверхности слоя продукта), м; τ – время, ч; a – коэффициент температуропроводности, м²/ч; λ – коэффициент теплопроводности сухого продукта $\left(a = \frac{\lambda}{c \rho} \right)$, Вт/(м·К); ρ – плотность продукта, м³; α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К).

Решение задачи (1) – (3) в аналитическом виде с граничным условием (4) не предоставляется возможным.

С помощью подстановки $z = x/y(\tau)$, $T(x, \tau) = \theta(z, \tau)$ перейдем в подвижную систему координат, в которой подвижная граница будет неподвижной. Преобразуем уравнение (1), используя правило дифференцирования сложной функции:

$$T'_\tau = \theta'_\tau + \theta'_z z'_\tau = \theta'_\tau - \frac{zy'}{y} \theta'_z; \quad T'_x = \theta'_z z'_x; \quad T''_{x^2} = \theta''_{zz} (z'_x)^2. \quad (5)$$

Здесь и далее $y'_\tau = dy/d\tau$; предполагается, что функция $y(\tau)$ - непрерывная с непрерывными первой и второй производными.

Уравнение (1) в подвижной системе координат имеет вид:

$$y^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + zy(\tau)y'(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad 0 < z < 1, \quad \tau > 0. \quad (6)$$

Здесь производная по τ берется уже при постоянном z и граничному условию на движущейся границе для функции $T(x, \tau)$ соответствует условие для функции $\theta(z, \tau)$ при $z = 1$.

Что касается начального условия $T(x, 0) = T_n$, $0 \leq x \leq y_0$, то в случае $y_0 > 0$ имеем для функции $\theta(z, \tau)$ следующее начальное условие:

$$\theta(z, 0) = T_n \quad (7)$$

и краевые условия:

$$\theta(z, \tau)|_{z=0} = T_0 + b\tau; \quad (8)$$

$$-\frac{\lambda}{y(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=1} = \alpha(\theta(1, \tau) - T_c). \quad (9)$$

где T_n - начальная температура, 0C ; T_c - температура среды, 0C .

Уравнение (6) содержит производную по переменной z от искомой функции с коэффициентом $zy(\tau)y'(\tau)$, зависящим в общем случае от координаты и времени. Постараемся так преобразовать это уравнение, чтобы исключить указанное слагаемое.

Для этого положим $\theta(z, \tau) = q(z, \tau) W(z, \tau)$ и подставим правую часть равенства в уравнение (6):

$$y^2(\tau) \frac{\partial W}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + b_1(z, \tau) \frac{\partial W}{\partial z} + b_2(z, \tau) W, \quad (10)$$

$$\text{где } b_1(z, \tau) = 2aq^{-1}q'_z + yy'z; \quad (11)$$

$$b_2(z, \tau) = aq^{-1}q''_{z^2} + zq^{-1}q'_z y y' - q^{-1}q y^2. \quad (12)$$

Функцию $q(z, \tau)$ определим из условия равенства нулю коэффициента $b_1(z, \tau)$ при $\frac{\partial W}{\partial z}$. Это дает:

$$q(z, \tau) = \gamma(\tau) \exp\left(-\frac{yy'z^2}{4a}\right), \quad (13)$$

где функция $\gamma(\tau)$ выбирается таким образом, чтобы в выражении для $b_2(z, \tau)$ исключить все члены, зависящие только от τ .

Дифференцируем выражение (13) по z и τ . Полученные соответствующие частные производные поставим в (12):

$$b_2(z, \tau) = \frac{y^2 (y')^2 z^2}{4a} - \frac{y y'}{2} - \frac{y^2 (y')^2 z^2}{2a} - \frac{\gamma'}{\gamma} y^2 + \frac{y^2 (y')^2 z^2}{4a} + \frac{y^3 y'' z}{4a},$$

из которого исключим слагаемые, явно зависящие от τ . Таким образом, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{y y'}{2} + \frac{\gamma'}{\gamma} y^2 = 0$,

решив которое, получим:

$$\gamma(\tau) = y^{-1/2}(\tau) \quad (14)$$

и вместе с этим искомым преобразованием:

$$\theta(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{y(\tau)}} \exp\left(-\frac{y y' z^2}{4a}\right) W(z, \tau), \quad (15)$$

где учтено, что $q(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{y(\tau)}} \exp\left(-\frac{y y' z^2}{4a}\right)$.

Преобразование (15) переводит уравнение (6), а стало быть, (1) в следующее:

$$y^2(\tau) \frac{\partial W}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{z^2 y^3(\tau) y''(\tau)}{4a} W, \quad 0 < z < 1, \tau > 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) можно представить в виде численной схемы или в аналитическом виде в зависимости от вида функции $y(\tau)$. При этом, решение уравнения (16) выражается через тригонометрические или бесселевы функции [3].

Рассмотрим два случая, когда уравнение (16) допускает применение метода разделения переменных.

1. $y'' = 0$, т.е. $y(\tau) = A\tau + B$, $A, B = \text{const}$. Для этого случая уравнение (16) принимает вид:

$$y^2(\tau) \frac{\partial W}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1, \tau > 0, \quad (17)$$

для области, форма которой меняется со временем, оставаясь подобной самой себе, при известном начальном распределении температуры и граничных условиях.

2. Случай, когда $y^3(\tau) y''(\tau) = -\beta = \text{const} \neq 0$, откуда в общем случае:

$$y(\tau) = \sqrt{(A\tau + B)^2 - \beta / A^2}, \quad (A, B = \text{const}). \quad (18)$$

В частном случае:

$$y(\tau) = \sqrt{M\tau + N}, \quad \beta > 0, \quad M^2 = 4\beta, \quad = \text{const} \neq 0, \\ y(\tau) = A\tau + B \quad (\beta = 0). \quad (19)$$

Уравнение (16) обращается в следующее:

$$y^2(\tau) \frac{\partial W}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\beta z^2}{4a} w, \quad 0 < z < 1, \tau > 0. \quad (20)$$

и допускает разделение переменных для первой краевой задачи в указанных областях.

Полагая, как обычно в методе разделения переменных $W = \psi(z) \cdot \theta(\tau)$, находим:

$$\frac{y^2(\tau) d\theta(\tau)}{\theta(\tau) d\tau} = \frac{a}{\psi(z)} \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2}. \quad (21)$$

Левая часть равенства (21) зависит только от τ , а правая – только от z . Это возможно только в том случае, когда левая и правые части не зависят ни от τ , ни от z , т.е. представляют одну и ту же постоянную γ^2 . Откуда получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = -\frac{\gamma^2}{y^2(\tau)} \theta(\tau); \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + \frac{\gamma^2}{a} \psi(z) = 0, \quad (23)$$

где γ^2 - константа разделения.

Таким образом, для рассмотренных законов движения границы: $y(\tau) = A\tau + B$ и $y(\tau) = \sqrt{(A\tau + B)^2 - \beta/A^2}$ решение задачи (1) может быть выражено через достаточно известные протабулированные функции [3].

Начальные и краевые условия. Начальное условие получается из (2) с помощью подстановки (3), то есть:

$$T(x, 0) = \theta(z, 0) = T_n, \quad 0 < z < 1 \quad (24)$$

Далее, поскольку $\theta(z, \tau) = q(z, \tau) w(z, \tau) = T_n$, получаем:

$$W(z, 0) = T_n / q(z, 0). \quad (25)$$

Обозначим $f(z) = T_n / q(z, 0)$. С учетом (25) получаем обобщенное начальное условие:

$$W(z, 0) = f(z). \quad (26)$$

Граничное условие первого рода для уравнения (1) заданное на левой границе при $x = 0$ (рис.1) преобразуется в граничное условие:

$$T(0, \tau) = \theta(0, \tau) = T_0 + b\tau, \quad (27)$$

и поскольку $z = 0$ при $x = 0$, получаем:

$$\theta(0, \tau) = q(0, \tau) W(0, \tau) = T_0 + b\tau, \quad (28)$$

откуда получаем краевое условие на левой границе:

$$W(0, \tau) = (T_0 + b\tau) / q(0, \tau), \quad (29)$$

то есть

$$W(0, \tau) = \psi(\tau), \quad \text{где } \psi(\tau) = (T_0 + b\tau) / q(0, \tau). \quad (30)$$

На правой границе (рис. 1) могут быть рассмотрены граничные условия второго и третьего рода.

Граничное условие третьего рода (4) преобразуется в граничное условие:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=1} = -\frac{\alpha y(\tau)}{\lambda} \cdot (\theta|_{z=1} - T_c). \quad (31)$$

Далее, из уравнения преобразования (15), получаем выражения для левой и правой частей:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=1} = \left\{ -\frac{yy'z}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{yy'z^2}{4a}\right) W(z, \tau) + \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{yy'z^2}{4a}\right) \frac{\partial W}{\partial z} \right\}_{z=1} = \quad (32)$$

$$= \left\{ q(z, \tau) \left[-\frac{yy'z}{2a} W(z, \tau) + \frac{\partial W}{\partial z} \right] \right\}_{z=1} - \quad (33)$$

$$-\frac{\alpha y(\tau)}{\lambda} (\theta|_{z=1} - T_c) = -\frac{\alpha y(\tau)}{\lambda} [q(z, \tau) W(z, \tau)|_{z=1} - T_c]$$

где в первой части уравнения $\frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{yy'z^2}{4a}\right) = q(z, \tau)$.

Приравняв правые части выражений (32) и (33), получим краевое условие на правой границе:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=1} = \left\{ \left(\frac{yy'z}{2a} - \frac{\alpha y(\tau)}{\lambda} \right) W(z, \tau) \right\}_{z=1} + \left\{ \frac{\alpha y(\tau) T_c}{\lambda q(z, \tau)} \right\}_{z=1}. \quad (34)$$

Введем функции:

$$\varphi_1(\tau) = \left[\frac{yy'z}{2a} - \frac{\alpha y(\tau)}{\lambda} \right]_{z=1} = \frac{yy'}{2a} - \frac{\alpha y(\tau)}{\lambda}, \quad (35)$$

$$\varphi_2 = \left\{ \frac{\alpha y(\tau) T_c}{\lambda q(z, \tau)} \right\}_{z=1} = \frac{\alpha y(\tau) T_c}{\lambda q(1, \tau)}. \quad (36)$$

С использованием функций (35)–(36) получим граничное условие третьего рода:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=1} = \varphi_1(\tau) \cdot W(z, \tau)|_{z=1} + \varphi_2(\tau). \quad (37)$$

Граничное условие 2-го рода для функции $T(x, \tau)$ в виде условия отсутствия теплообмена на правой границе, т.е. в виде условия $\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} = 0$.

Так как $\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial z} \cdot \frac{1}{y(\tau)}$, то получаем:

$$\left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial z} \right|_{z=1} = \left. \frac{\partial}{\partial z} (q(z, \tau) W(z, \tau)) \right|_{z=1} = \quad (38)$$

$$= \left\{ \frac{\partial q(z, \tau)}{\partial z} W(z, \tau) + \frac{\partial W(z, \tau)}{\partial z} q(z, \tau) \right\}_{z=1} = 0.$$

Так как $\frac{\partial q(z, \tau)}{\partial z} = q(z, \tau) \frac{-y(\tau) y'(\tau) z}{2a}$, то из формулы (39), получаем:

$$\left. \frac{\partial W(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=1} = \frac{y(\tau)y'(\tau)}{2a} W(z, \tau)|_{z=1}. \quad (39)$$

Используя функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, граничное условие второго рода запишется в виде (37), при этом

$$\varphi_1(\tau) = \frac{y(\tau)y'(\tau)}{2a}, \quad (40)$$

$$\varphi_2 = 0. \quad (41)$$

Конечно-разностный метод решения задачи в неподвижной системе координат. Используя соотношения (26), (30), (35)–(37), (40)–(41) запишем задачу (1)–(4) в неподвижной системе координат:

$$y^2(\tau) \frac{\partial W}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1, \tau > 0, \quad (42)$$

с начальным условием:

$$w|_{\tau=0} = f(z); \quad (43)$$

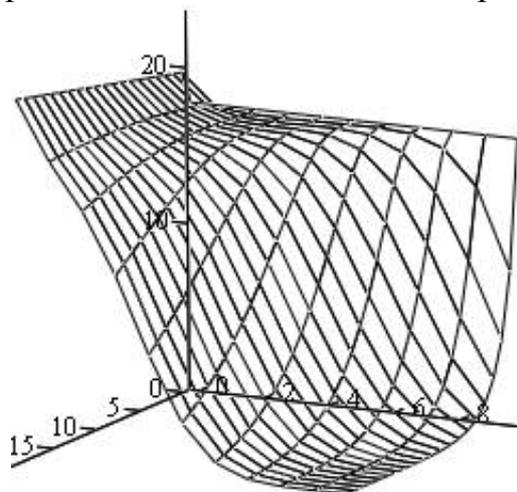
с граничным условием 1–го рода:

$$w|_{z=0} = \psi(\tau) \quad (44)$$

и граничным условием 3–го или 2–го рода:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=1} = \varphi_1(\tau)W(z, \tau)|_{z=1} + \varphi_2(\tau). \quad (45)$$

Задача (42)–(45) решена с помощью конечно – разностной схемы [4].



θ

Рис. 2. График развития температуры в слое зерна

На рис. 2 представлен график развития температуры в слое зерна, который позволяет по информации о текущей температуре зернового слоя осуществлять оперативное предупреждение локальных очагов самосогревания при хранении зерна.

Использование данной модели в реальных условиях создает возможность для расчета температуры очага самосогревания по величине температурного поля и позволяет проводить систематические расчеты параметров процесса распространения теплоты в силосе [2]. Полученная информация может быть эффективно использована при выборе оптимальных режимов вентилирования и охлаждения зернового сырья в процессе его хранения в силосах.

Библиографический список

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 1985. – 480 с.
2. Шевцов А.А., Павлов И.О., Бритиков Д.А., Фурсова (Воронова) Е.В. Математическая модель процесса самосогревания зернового сырья при хранении в силосе // Хранение и переработка сельхозсырья. – 2006. – № 3. – С. 56-59.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: 1971. - 576 с.
4. Свидетельство № 2011618172 об офиц. Рег. Progr. для ЭВМ Россия, Расчёт полей температуры и влагосодержания для процесса самосогревания зерна при силосном хранении / Бритиков А.М., Шевцов А.А., Павлов И.О., Воронова Е.В., Бритиков Д.А. Воронеж. гос. технол. акад. – № 2011614947 ; заявл. 05.07.2011; опубл.18.10.2011.

~ E.V. Voronova

~ **Solution of the boundary problem of propagation of heat from the local chamber of grain self-warming by the method of functional transformations**

~ **Abstract.** The paper presents an approach which is called the method of functional transformations are applied in a randomly moving abroad to detect pockets of self-warming during grain storage in a production environment.

~ **Keywords:** boundary value problem, self-warming hearth, thermal conductivity, temperature, grain.

УДК 517.977.56

Ю.А. Гнилицкая*, О.Р. Балабан**

* - ФБГОУ ВПО «Воронежский государственный университет», Воронеж, Россия

** - ВУНЦ ВВС «ВВА им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, Россия

ГРАНИЧНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД В СЕТЕПОДОБНЫХ ОБЪЕКТАХ

Аннотация. В работе представлены методы отыскания решений задач оптимизации, основанные на современной теории дифференциальных уравнений в пространствах типа С.Л. Соболева. Рассмотрен случай граничной оптимизации и граничного наблюдения для дифференциальной системы в сетеподобной области \mathfrak{Z} , состояние которой описывается как решение начально-краевой задачей для уравнения Навье-Стокса.

Ключевые слова: турбулентные течения, сетеподобные объекты, граничная оптимизация.

Настоящая работа продолжает исследования, результаты которых приведены в [1, 2]: представлен подход, основанный на априорных оценках обобщенных решений начально-краевой задачи для уравнений параболического типа с распределенными параметрами на графе. На этой базе ставится и анализируется задача граничной оптимизации гидродинамических процессов турбулентных течений многофазных сред в сетеподобных объектах (трубопроводы, гидравлические сети, системы кровеносных сосудов живых организмов) для дифференциальной системы, рассматриваемой в области $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times [0, T]$ ($\bar{\mathfrak{Z}}_T = (\mathfrak{Z} \cup \partial\mathfrak{Z}) \times [0, T]$) [1].

Рассмотрим сетеподобную область $\mathfrak{Z} = \bigcup_k \mathfrak{Z}_k \bigcup_l S_l$ — открытая область евклидова пространства \mathbb{R}^n с границей $\partial\mathfrak{Z}$. Обозначим через S_l поверхности, разделяющие смежные области \mathfrak{Z}_k ; S_l^-, S_l^+ — односторонние поверхности для S_l , определяемые направлением нормалей n_l^-, n_l^+ к ним.

Введем следующие пространства: $L_2(\mathfrak{Z}_T)$ — пространство суммируемых с квадратом функций на области $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times (0, T)$ ($T < \infty$); $W_2^1(\mathfrak{Z}_T)$ — пространство функций из $L_2(\mathfrak{Z}_T)$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка также из $L_2(\mathfrak{Z}_T)$ (аналогично вводятся

пространства $L_2(\mathfrak{Z})$ и $W_2^1(\mathfrak{Z})$). Обозначим $\Omega(\mathfrak{Z}_T)$ — множество функций $u(x, t) \in W_2^1(\mathfrak{Z}_T)$, удовлетворяющих соотношениям

$$Y|_{s_T^-} = Y|_{s_T^+},$$

$$\sum_1 \frac{\partial Y}{\partial n_1^-} |_{s_T^-} + \sum_1 \frac{\partial Y}{\partial n_1^+} |_{s_T^+} = 0.$$

$W_2^1(S_1, \mathfrak{Z}_T)$ — замыкание множества $\Omega(\mathfrak{Z}_T)$ по норме $W_2^1(\mathfrak{Z}_T)$. Пространство $V_2^1(S_1, \mathfrak{Z}_T)$ представляет собой элементы пространства $\Omega(\mathfrak{Z}_T)$, непрерывные по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\mathfrak{Z})$ [1, 3, 5].

В замкнутой области $\overline{\mathfrak{Z}_T}$ для $Y(v)(x, t) \in V_2^1(S_1, \mathfrak{Z}_T)$ рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} Y = 0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (2)$$

$$Y(x, 0) = Y_0(x), x \in \mathfrak{Z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} |_{\partial \mathfrak{Z}} = v(x, t); \quad (4)$$

Δ — оператор Лапласа, через $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ обозначен вектор скорости гидравлического потока; $f(x, t), v(x, t), Y_0(x) \in L_2(\mathfrak{Z}_T)$ — заданные функции. Соотношения (1), (2) образуют систему уравнений Навье-Стокса для несжимаемой вязкой среды (ν — коэффициент вязкости) в сетеподобной области \mathfrak{Z} .

Определение. Слабым (турбулентным) решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется элемент $Y \in V_2^1(S_1, \mathfrak{Z}_T)$. При этом функция $Y(x, t)$ удовлетворяет соотношению

$$(Y(x, t), \eta(x, t)) - \int_{\mathfrak{Z}_t} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_0^t \rho(Y, \eta) dt + \int_0^t \rho(Y, Y, \eta) dt =$$

$$= (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\partial \mathfrak{Z}_t} v(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau + \int_{\mathfrak{Z}_t} f(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau$$

для любых $t \in [0, T]$ и любых $\eta(x, t) \in W_2^1(S_1, \mathfrak{Z}_T)$, равных нулю на $\partial \mathfrak{Z}_T$.

Формы $\rho(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathfrak{Z}} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx$, $\rho(u, v, \omega) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathfrak{Z}} u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \omega_i dx$ заданы на

таких функциях u, v, ω , для которых сходятся интегралы в представлении данных форм.

Имеет место следующее утверждение, полное доказательство которого приведено в работе [2] и которое основывается на доказательствах аналогичных теорем в работах [3–5].

Теорема 1 [2]. *Начально-краевая задача (1)–(4) имеет единственное слабое (турбулентное) решение, непрерывно зависящее от исходных данных $f(x, t)$, $v(x, t)$ и $Y_0(x)$.*

Пусть $C: V_2^1(S_1, \mathfrak{Z}_T) \rightarrow L_2(\partial\mathfrak{Z}_T)$ — линейный непрерывный оператор (оператор граничного наблюдения), $L_2(\mathfrak{Z}_T)$ — пространство наблюдений; $Y(v)(x, t)$ (состояние системы) — слабое (турбулентное) решение начально-краевой задачи (1)–(4) ($CY(v)(x, t) = Y(v)(x, t)|_{\partial\mathfrak{Z}_T}$). Пусть $U = L_2(\partial\mathfrak{Z}_T)$ — пространство допустимых граничных функций; $Y(v)(x, t)|_{\partial\mathfrak{Z}_T}$ — след функции $Y(v)(x, t)$ на поверхности $\partial\mathfrak{Z}_T$; $J(v)$ — функционал (функция стоимости), требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $U_\delta \subset U$:

$$J(v) = \iint_{L_2(\partial\mathfrak{Z}_T)} Y(v)(x, t) - z_0(x, t) + (Nv, v)_U,$$

где $N: U \rightarrow U$ — линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv, v)_U \geq \zeta \|v\|_U^2$ ($\zeta > 0$ — фиксированная постоянная); $z_0(x, t) \in L_2(\mathfrak{Z}_T)$ — заданное наблюдение. Коэрцитивность квадратичной компоненты функционала $J(v)$ обеспечивает слагаемое $(Nv, v)_U$ [4].

Задача граничной оптимизации. *Задача оптимизации по граничным данным системы (1), (2) состоит в отыскании $\min_{v \in Y_\delta} J(v)$.*

Решением задачи граничной оптимизации системы (1), (2) (оптимумом) является элемент $v^* \in U$, если на множестве $U_\delta \subset U$ он доставляет минимум функционалу $J(v)$.

Теорема 2. *Задача стартовой оптимизации системы (1), (2) по стартовым состояниям $v(x) \in Y$ имеет единственный оптимум $v^* \in Y_\delta$, т.е.*

$$J(v^*) = \min_{v \in Y_\delta} J(v).$$

Доказательство основывается на утверждении теоремы 1 о непрерывной зависимости слабого (турбулентного) решения начально-краевой задачи (1)–(4), коэрцитивности билинейной формы функционала $J(v)$ и почти дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы в [6] (см. также работу [7]).

Алгоритм отыскания решений задачи граничной оптимизации сводится к двум основным частям:

1) определение слабого (турбулентного) решения начально-краевой задачи (1)–(4) для любого фиксированного $v(x) \in Y$,

2) определение решения задачи граничной оптимизации как задачи поиска оптимума $v^* \in Y_\delta$ функционала $J(v)$ для $v(x) \in Y$.

Следует отметить, что рассмотренные в работе методы отыскания решений задач оптимизации позволяют произвести более глубокий анализ математических моделей гидродинамических процессов в сетеподобных объектах. Представленные результаты аналогичны классическим исследованиям как задач оптимизации (градиентной оптимизации) [8–12], устойчивости [13, 14] и стабилизации [15, 16], так и теории оптимального управления дифференциальными системами [17–20].

Библиографический список

1. Иванов А.В., Козлов А.В., Провоторов В.В., Рязских В.И. Об обобщенных решениях начально-краевых задач для уравнения гидродинамики. В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) сборник трудов VII Международной конференции. 2014., Воронеж, 2014. С. 162-165.
2. Гнилицкая Ю.А. Задача граничной оптимизации динамики турбулентных течений многофазных сред в сетеподобных объектах // Системы управления и информационные технологии, № 2(60), 2015. С. 11–15.
3. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions Automation and Remote Control. Automation and Remote Control. 2015. Т. 76. № 2. С. 318-322.
4. Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж, 2014, 188 с.
5. Волкова А.С., Гнилицкая Ю.А., Провоторов В.В. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе. Системы управления и информационные технологии. 2013. Т. 51. № 1. С. 11-15.
6. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе. Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 154-163.
7. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе. Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.
8. Подвальный С.Л. Особенности поисковой градиентной оптимизации сложных объектов с использованием сопряженных систем. Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56. № 2. С. 18-22.
9. Подвальный С.Л. Решение задач градиентной оптимизации каскадно-реакторных схем с использованием сопряженных систем. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9. № 2. С. 27-32.
10. Подвальный С.Л. Многоальтернативные системы: обзор и классификация. Системы управления и информационные технологии. 2012. Т. 48. № 2. С. 4-13.
11. Подвальный С.Л. Сопряженные системы и градиент при оптимизации динамических систем. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2012. Т. 8. № 12-1. С. 57-62.

12. Volkova A.S., Gnilitzkaya Yu.A., Provotorov V.V. On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs. Automation and Remote Control. 2014. Т. 75. № 2. С. 405-412.

13. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием. Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 3. С. 495-508.

14. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.

15. Веремей Е.И., Корчанов В.М. Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса. Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 126-137.

16. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением. Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 116-133.

17. Карелин В.В. Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения. Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 4. С. 109-114.

18. Потапов Д.К. Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. Известия РАН. - ТиСУ. - 2013. - № 2. - С. 19-24.

19. Kamachkin A.M., Yevstafyeva V.V. Oscillations in a relay control system at an external disturbance // Control Applications of Optimization 2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop, 2:(2000), pp.459-462.

20. Евстафьева В.В. Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 42-56.

Yu. A. Gnilitzkaya, O. R. Balaban

Boundary optimization of flow dynamics in multiphase media net-like objects

Abstract. The paper presents a method for finding solutions of the problems of optimization based on the modern theory of differential equations in spaces of type S.L. Sobolev. The case of boundary optimization and monitoring of the boundary for differential net-like system in the region, whose state is described as a solution to the initial boundary value problem for the Navier-Stokes equations.

Keywords: turbulent flow, net-like objects, boundary optimization.

УДК 004.9

А.О. Данилин, Г.В. Петрухнова

ГОУ ВПО Воронежский государственный технический университет,
Воронеж, Россия

МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРАВИЛ ПО УСТРАНЕНИЮ ПРОГРАММНЫХ ДЕФЕКТОВ.

Аннотация. Приводятся условия для формирования модели принятия решений на основе правил по устранению дефектов программного обеспечения. Обозначены основные критерии и построено дерево принятия решений в рамках процесса управления жизненным циклом программных инцидентов. Описана последовательность действий для обработки предложенной модели.

Ключевые слова: программный дефект, инцидент, дерево принятия решений, модель принятия решений, качество, воспроизводимость, критичность, приоритизация.

В задаче управления дефектами важную роль играет процесс нейтрализации выявленных инцидентов, поскольку от количества устранённых проблем и качества их предотвращения зависит качество конечного продукта. Следует отметить, что при создании ПО ответственность за устранение неисправностей программ лежит на разработчиках, что позволяет отнести процесс нейтрализации дефектов к области максимально субъективной, т.е. зависящей от человеческого фактора [1]. В контексте оценки и повышения качества ПО целесообразным является решение по снижению субъективных факторов до минимума за счёт автоматизации ряда процессов жизненного цикла программных дефектов.

Рассмотрим формализацию процесса принятия решения об устранении дефектов ПО. Для построения соответствующей модели вначале будет проведена классификация инцидентов по заведомо обозначенным признакам и разделение всей их совокупности на определённые группы, что необходимо для автоматизации процесса поиска и принятия решений. При этом под принятием решения подразумевается выбор определённого действия из множества возможных вариантов (альтернатив), где само решение является предписанием к действию с целью разрешения проблемы [2]. Далее будут определены правила принятия решений и обозначены пути их формирования, а также построено дерево принятия решений. При формализации принятия решений для автоматизированной нейтрализации

инцидентов данный этап жизненного цикла дефектов принимает более объективный и менее трудоёмкий образец (паттерн).

Присвоим категориям воспроизводимости и критичности буквенно-цифровые коды для записи правил принятия решений (таблица 1 и таблица 2).

Таблица 1. Соответствие категорий воспроизводимости дефектов коду записи.

Категория воспроизводимости	Буквенно-цифровой код
Постоянная	B1
Закономерная	B2
Скрытая	B3
Запрещённая	B4

Таблица 2. Пример соответствия категорий критичности дефектов коду записи.

Категория критичности	Буквенно-цифровой код
Высокий уровень	KP1
Средний уровень	KP2
Низкий уровень	KP3

Принятие решений по нейтрализации дефектов модели оценки качества (с точки зрения надёжности ПО) в общем случае базируется на принципах конструкций (нечётких правил), «отправной точкой» которых служит уровень критичности, полностью определяющий дальнейшую стратегию нейтрализации дефекта [3]. Графическая формула модели принятия решений на основе правил по устранению дефектов (Рис. 1) имеет следующую зависимость. Каждому уровню критичности (УК) соответствует 1 класс приоритетов пользователя (КП) и 5 классов дефектов (КД), каждому из которых соответствует n-типов (Т) дефектов, принадлежащих одной из 4 групп воспроизводимости (В). В зависимости от уровня критичности проводится соответствие между набором групп пользовательских приоритетов (ПП). При формировании конечного решения (Р) выбранная группа пользовательских приоритетов позволяет сформировать очередность обработки дефектов для их нейтрализации.

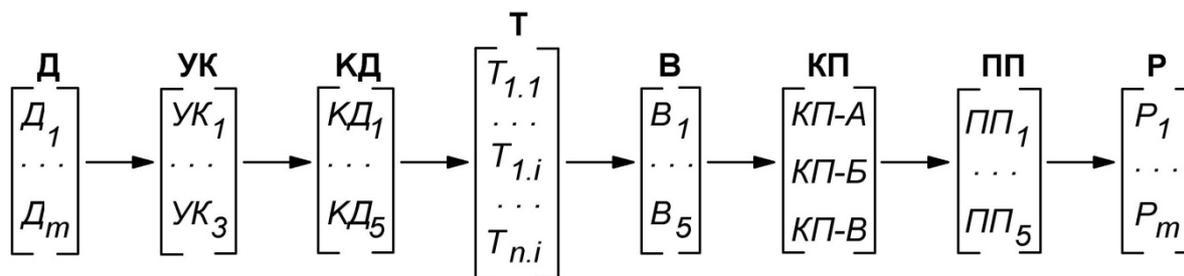


Рис. 1. Графическая формула модели принятия решений по устранению дефектов ПО

Основываясь на данных таблицы описания типов дефектов, сформированной на этапе выявления условий, а также на построении правил

в соответствие с графической формулой, определим общую запись правил принятия решений.

D_m : ЕСЛИ УК есть $УК_i$ И КД есть $КД_i$ И Т есть $T_{n,i}$ И В есть V_n И КП есть КП-А, ТО ПП есть ПП₁ ИЛИ ПП₂, ИНАЧЕ ЕСЛИ КП есть КП-Б, ТО ПП есть ПП₁ ИЛИ ПП₂ ИЛИ ПП₃, ИНАЧЕ ЕСЛИ КП есть КП-В, ТО ПП есть ПП₁ ИЛИ ПП₂ ИЛИ ПП₃ ИЛИ ПП₄ ИЛИ ПП₅, ТО Р есть R_m .

Такую структуру способно вместить в себя дерево принятия решений, подробное описание работы с которым приведено ниже.

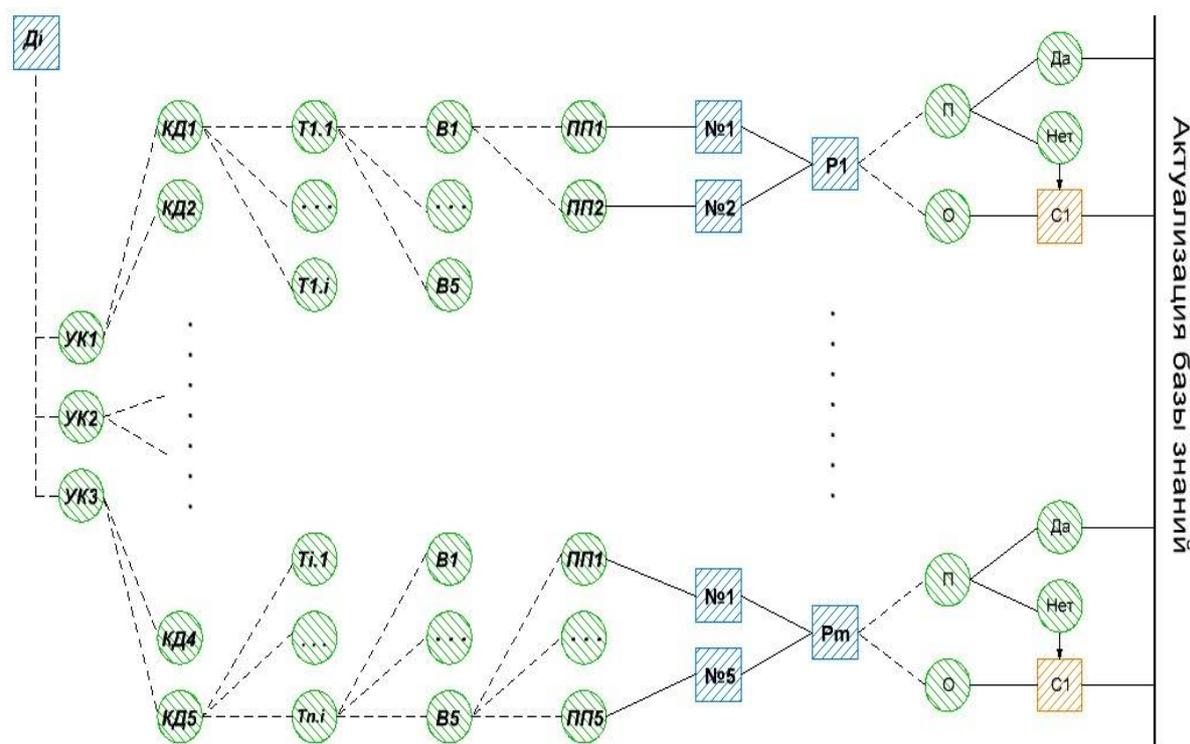


Рисунок 2 – Дерево принятия решений по нейтрализации дефектов согласно трёхступенчатой градации критичности инцидентов

Для каждого дефекта (D_i) существует только один уровень критичности из принятой градации. На рисунке 2 построено дерево принятия решений на основе трёхступенчатой градации критичности, т.е. $УК1$ – высокий уровень, $УК2$ – средний, $УК3$ – низкий. От выбранного уровня критичности зависят такие параметры как набор типов дефектов и набор пользовательских приоритетов.

Каждому уровню критичности соответствует однотипный набор классов дефектов (таблица 3).

Таблица 3. Основные классы дефектов ПО.

Название класса	Краткое описание класса дефектов
1	2
Класс I. Порча данных	Дефекты данного класса характерны для ПО, позволяющего работать с файлами пользователя или файлами системы (файлами программного окружения, системными файлами). Также к данному классу относятся дефекты, характеризующиеся особенностями обработки ПО файлов необходимых для работы программы и файлов-проектов, создаваемых исследуемым ПО.
Класс II. Некорректные вычисления	Второй класс дефектов присущ программным системам, осуществляющим разного рода вычисления, применяемые для обработки программой каких-либо данных, или генерируемые (используемые) пользователем для дальнейших операций (как внутри программной системы, так и сторонними инструментами).
Класс III. Проблемы интерфейса	Класс «Проблемы интерфейса» относится к дефектам, возникающим как в процессе работы пользователя с графической оболочкой, так и в консольных системах. Суть ошибок данного класса сводится к возникновению проблем взаимодействия пользователя и ПО, связанных с некорректной работой интерфейса или неверной интерпретацией (обработкой) пользовательских команд через интерфейс программы.
Класс IV. Проблемы связи и подключений	Класс дефектов распространяется на программы, обращающиеся в процессе работы к БД, удалённым ресурсам или иным источникам данных используемых ПО.
Класс V. Внешние факторы	Дефекты пятого класса характеризуются рядом особенностей влияния на работу ПО таких внешних факторов, как некорректное расположение файлов для работы программы, неверный формат обрабатываемых данных и прочие.

Исходя из особенностей специфики исследуемого ПО определяется набор типов дефектов. Изначально их может быть по три для каждого класса, однако для более сложных программных систем их количество способно возрасти в несколько раз, что, безусловно, усложняет модель принятия решений, но в конечном результате позволит сформировать более точные и наиболее применимые решения для конкретного случая.

После выбора типа дефекта перед пользователем стоит задача определения закономерностей проявления данного инцидента. Для этого может быть использована любая методика тестирования. При этом самой примитивной и в то же время эффективной является следующая: алгоритм воспроизведения дефекта закидывается. В каждом цикле с определённой периодичностью меняются условия воспроизведения, такие как параметры условий воспроизводимости (в пределах устойчивого повторения дефекта),

параметры запуска приложения, особенности действий пользователя перед возникновением инцидента, во время и после него, и т.п.

После выявления закономерности воспроизведения дефекта начинается этап назначения пользовательского приоритета. Поскольку каждому уровню критичности соответствует определённый набор пользовательских приоритетов, то выбор того или иного значения (*III*) заведомо предопределён и от выбранного варианта зависит лишь очерёдность обработки данного дефекта (соответствующая порядковому номеру приоритета для данного *УК*) в общем перечне нейтрализации БДД. Таким образом, имея два дефекта с номером очерёдности №2, первым будет отработан тот, уровень критичности которого выше. В противном случае, если внутри одного уровня критичности существует два и более инцидента с одним и тем же номером очерёдности – приоритет первенства имеет тот дефект, запись которого в БДД была добавлена раньше.

После формирования решения (при наличии обратной связи) пользователь выбирает: принять данное решение для нейтрализации инцидента или отвергнуть. В случае принятия решения и, в дальнейшем, его применимости выполненная цепочка зависимостей фиксируется в базе знаний. В противном случае пользователю предлагается альтернативный вариант, т.е. ссылка на решение для смежной ветви. Возможные варианты решения проблемы (когда происходит переход более чем между двумя ветвями дерева) должны быть подвергнуты анализу, результатом которого может стать формирование нового (уникального для существующей базы знаний) решения, что может быть осуществлено как пользователем системы, так и автоматически средствами эвристического сопоставления.

Теоретическое обоснование предложенной модели принятия решений позволяют прийти к выводу, что эффективность её применения довольно высока. Учитывая, что определённому типу дефектов соответствует некий набор предлагаемых решений, ветвление ряда потенциальных решений возможно при условии наличия в системе (блоке) обратной связи. Рациональное использование потенциала модели принятия решений на основе правил по устранению дефектов ПО может гарантировать повышение качества конечного продукта, а также весомую экономическую отдачу и повышение уровня зрелости организации в целом.

Библиографический список

1. Данилин А.О., Кол М.Д., Петрухнова Г.В. Обеспечение надёжности программных решений. Мат-лы XV Международной науч.-методич. конф. Информатика: проблемы, методология, технологии. – Воронеж, 2015. Т.2. – С.265-268.
2. Процесс и методы принятия управленческих решений. – Электрон. дан. – Режим доступа: http://edu.dvgups.ru/METDOC/EKMEN/MEN/OSN_MEN/METHOD/UP_CH1/frame/8.htm

3. Данилин А.О., Петрухнова Г.В. Формализация определения уровня качества программного обеспечения // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2014, Т.10. 11. № 5-1, – С.52-56.

» A.O. Danilin, G.V. Petruchnova

» **A model for making decisions based rules prevent software defects**

» **Abstract.** The conditions for forming a model of decision-making on elimination of software defects are determined. The key criteria and a decision tree as part of the process lifecycle management software incidents are identified. The sequence of processing actions of the proposed model is described.

» **Keywords:** software defect, the incident, a decision tree, the model of decision making, quality, reproducibility, severity, prioritization

УДК 004.9:519.2

О. И. Захарова

ФГБОУ ВПО Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия

**СПОСОБ ИНКАПСУЛЯЦИИ СВОЙСТВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ
ГИПОТЕЗ**

Аннотация: В статье рассмотрена актуальная задача, связанная с проверкой гипотез о состоянии социальных и экономических объектов и их идентификацией. Задача решается с помощью введения понятий инкапсуляция и множественность свойств анализируемого объекта, являющихся основой идентификации.

Ключевые слова: идентификация объектов, инкапсуляция свойств, проверка гипотез.

Идентификация объекта во многих приложениях связана с проверкой гипотез о его состоянии. Такие гипотезы выдвигаются обычно для сложных объектов (или субъектов), состояние которых в общем случае представляется неочевидным, а его идентификация связана с использованием косвенных признаков, опосредованных связей и свойств.

Множественность и одновременность свойств является основой идентификации практически любого объекта, – в редких случаях мы можем ограничиться одним свойством с целью упрощения идентификации, – в реальных задачах мы должны наблюдать взаимодействия различных свойств, связанных с объектом.

Априори сформулированные основные гипотезы, связанные с объектом, могут быть многократно реконструированы с использованием второстепенных гипотез. Фактически в этом и заключается концепция инкапсуляции: второстепенные гипотезы «вкладываются» в определенные капсулы, где доминируют основные гипотезы.

Мы интерпретируем понятие инкапсуляции с двух точек зрения: как сохранение ресурсов (капсула) и как возможности перераспределения этих ресурсов. При этом конструктивными инструментами инкапсуляции являются гипотезы и их совокупности, – именно они владеют вероятностными ресурсами и дают новые возможности «перетекания» этих ресурсов из одних гипотез в другие. Цель такого перераспределения – обеспечить апостериорные результаты идентификации, которые удовлетворяют соответствующим проверкам гипотез.

В качестве объекта идентификации могут выступать самые разные системы, – технические, социальные, экономические и т.п. Не умаляя общности можно утверждать, что особое значение задачи идентификации приобретают, когда объектом исследования является человек как представитель определенного социума (клиент компании, сотрудник предприятия, носитель болезни, обладатель определенных знаний и т.п.).

Информация о свойствах социального или маргинального субъекта может отсутствовать, может быть искажена или умышленно фальсифицирована. В таких ситуациях исследователь встречается с явлением «скрытой сущности» [6], которое формируется в условиях априорной неопределенности состояния объекта.

Задачи идентификации объекта в условиях скрытой сущности многочисленны, они могут принадлежать к самым разным сферам деятельности, от кредитования клиентов банка до определения авторства неизвестного текста, спама и т.п. Все эти и им подобные задачи проверки гипотез возможны только на основе использования информативных свойств, присущих объекту, и свидетельств о наличии или отсутствии таких свойств.

Свойство как философская категория [1] характеризует объект с различных ракурсов, – в одном и том же объекте можно одновременно «увидеть» разные свойства, характеризующие объект с разных точек зрения, – например, возраст, пол, наличие или отсутствие детей, получаемый доход и т.п.

Любое свойство характеризуется альтернативными гипотезами, например: Возраст = {Молодой V Пожилой V Старый}, V – символ «ИЛИ». Каждая из таких гипотез оценивается вероятностной мерой, которая определяет достоверность гипотезы. Совокупность представленных гипотез в свойстве «Возраст» образуют полную группу возможных событий: $P(\text{Молодой}) + P(\text{Пожилой}) + P(\text{Старый}) = 1$;

Гипотеза с вероятностью $P=1$ рассматривается как абсолютно достоверное событие, с вероятностью $P=0$ как невозможное.

Идентификация состояния объекта на основе используемых свойств, рассматривается здесь как основной механизм проверки гипотез. При этом следует отметить, что в общем случае свойства, характеризующие объект, могут рассматриваться не только на основе фактов и свидетельств, но и на основе интуиции исследователя и вариативности соответствующих гипотез.

В общем случае проверка гипотез на основе соответствующих свойств связана с двумя основными направлениями:

- использование сочетаний свойств;
- инкапсулирование (вложение) дополнительных свойств и гипотез.

Проверка гипотез на основе сочетаний свойств объекта заключается в простом объединении соответствующих гипотез, характеризующих объект. Эта концепция соответствует простой «житейской мудрости», – чем больше свойств, используемых в характеристике объекта, тем больше мы знаем об объекте.

Приведем простой пример, который показывает несостоятельность этого тезиса. Допустим, что объектом является шар с двумя свойствами «Цвет» и «Символ». В урне 10 шаров, из них 8 шаров имеют белый цвет, а 2 шара – черный. На каждом шаре нарисован символ либо в виде буквы «А», либо в виде буквы «Б». Буква «А» нарисована на 3-х белых шарах и одном черном, а буква «Б» – на 5-ти белых шарах и одном черном. Ниже представлена схема размещения шаров (О – шар белого цвета, ● - шар черного цвета) :



Рис. 1

Вероятность выбора из урны белого шара - $(8/10)$.

Вероятность выбора из урны черного шара - $(2/10)$.

Вероятность выбора из урны шара с символом «А» - $(4/10)$.

Вероятность выбора из урны шара с символом «Б» - $(6/10)$.

В этом примере свойство «Цвет» имеет две гипотезы: белый шар и черный, а свойство «Символ» имеет также две гипотезы: «А» и «Б». Ниже представлен табличный вариант описанной ситуации:

Таблица 1.

Свойства	Гипотезы					Σ
	1	2	3	4	...	
Цвет	Белый	Черный				
<i>Вероятности</i>	0,8	0,2	–	–	...	= 1
Символ	«А»	«Б»				
<i>Вероятности</i>	0,4	0,6	–	–	...	= 1

Нетрудно заметить, что гипотезы по свойству «Цвет» образуют полную группу событий: $(0,8 + 0,2) = 1$, аналогично по свойству «Символ»: $(0,4 + 0,6) = 1$.

Если же предположить, что рассматриваемые нами свойства проявляются или могут проявиться в определенных условиях (косвенно или опосредованно), мы должны рассматривать свойства и гипотезы в единой целостности.

При этом:

вероятность выбора белого шара с символом «А»: $(8/10)*(3/8) = 0,3$;

вероятность выбора белого шара с символом «Б»: $(8/10)*(5/8) = 0,5$;

вероятность выбора черного шара с символом «А»: $(2/10)*(1/2) = 0,1$;

вероятность выбора черного шара с символом «Б»: $(2/10)*(1/2) = 0,1$;

Если в таблице 1 мы использовали 2 свойства, в каждом из которых по 2 гипотезы, которые представляют полную группу, то в таблице 2 мы используем 4 разных сочетания, которые образуют одну (общую) полную группу событий: $(0,3 + 0,5 + 0,1 + 0,1) = 1$. Это явление можно назвать «размазыванием» полной группы, – количество сочетаний увеличивается, а вероятности гипотез уменьшаются.

Таблица 2.

Сочетания свойств	Сочетания категорий					Σ
	1	2	3	4	...	
Цвет и Символ	Белый & «А»	Белый & «Б»	Черный & «А»	Белый & «А»		
Вероятности	0,3	0,5	0,1	0,1	...	= 1

Дальнейшее увеличение количества свойств (дополнительных сочетаний) приводит к возрастанию энтропии и неопределенности ситуации на объекте в целом:

Энтропия по цвету: $-(0,8 \log_2 0,8 + 0,2 \log_2 0,2) = 0,72$;

Энтропия по символу: $-(0,4 \log_2 0,4 + 0,6 \log_2 0,6) = 0,97$;

Энтропия по цвету и символу (четыре сочетания):

$-(0,3 \log_2 0,3 + 0,5 \log_2 0,5 + 0,1 \log_2 0,1 + 0,1 \log_2 0,1) = 1,68$ и т.д.

Альтернативный подход к идентификации объекта связан с инкапсуляцией новых (дополнительных) свойств и гипотез в среду поиска. При этом подходе определяется основное свойство, которое, по мнению исследователя, представляется наиболее информативным для характеристики объекта. Все остальные свойства имеют цель поддержки основного свойства для повышения достоверности рассматриваемых гипотез. В качестве основы для предлагаемой инкапсуляции используется формула Байеса [5] и связанные с ней вычислительные схемы [1,6,7,8,9].

Использование «наивного» Байеса в задачах идентификации хорошо известно, однако концепция множественности и одновременности используемых гипотез порождает совершенно новую «картину» их взаимодействия.

В этой работе она представляется специфической схемой, на которой приведена методика взаимодействия свойств (основных и второстепенных), а также соответствующих гипотез (альтернативных и безальтернативных, а также априорных и апостериорных).

Не нарушая общности, проведем проверку гипотез с использованием 3-х независимых свойств.

Структура первого свойства «Возраст» включает в себя три несовместные альтернативы (Молодой, Пожилой, Старый):

$$\text{Возраст } (H_1) = \text{Молодой } (H_1^1) \vee \text{Пожилой } (H_1^2) \vee \text{Старый } (H_1^3); (1)$$

Теперь для каждого из определенных свойств мы можем определить полную группу несовместных гипотез и полную вероятность по свойству «Возраст» [7]:

$$\sum_{i=1}^3 P(B_i) = 1; P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B/B_i)P(B_i); (2)$$

Для иллюстрации методики инкапсуляции в качестве основного свойства будем использовать – свойство «Возраст». Выбираем 3 возрастные группы (гипотезы): H_1^1 – «Молодой» (человек), H_1^2 – «Пожилой» (человек), H_1^3 – «Старый» (человек).

$$\text{Допустим, что } P(H_1^1) = 0,3; P(H_1^2) = 0,5; P(H_1^3) = 0,2;$$

$$\text{Эти гипотезы образуют полную группу: } P(H_1^1) + P(H_1^2) + P(H_1^3) = 1.$$

Каждая из вышеупомянутых возрастных групп рассматривается с новой точки зрения, например с точки зрения «Высшего образования». И это вполне естественно: любая группа не только является носителем информации о возрасте, но и о высшем образовании тоже. В конечном счете в этом и состоит концепция инкапсуляции (вложения) свойств.

«Возраст» как свойство и «Высшее образование» как другое свойство интерпретируются на одном и том же общем объекте. Гипотезы (H_1^1, H_1^2, H_1^3), связанные с возрастом, могут существенно отличаться от гипотез (H_2^1, H_2^2, H_2^3), связанных с «Высшим образованием» как по семантике, так и по вероятностям. Другими словами, свойство «Высшее образование» может привнести дополнительную информацию, связанную с «Возрастом», причем эта информация способна как повысить достоверность «Возраста», так и уменьшить её. Именно эти информационные процессы совершенно нетривиально меняют направление проверки гипотез.

$$\text{Допустим, что } P(H_2^1) = 0,05; P(H_2^2) = 0,3; P(H_2^3) = 0,3.$$

(Заметим, что в отличие от основного свойства полная группа здесь может и не иметь места).

Аналогично происходит вложение свойства «Мужской пол» с гипотезами:

$$P(H_3^1)=0,1; P(H_3^2)=0,2; P(H_3^3)=0,1.$$

На рис. 2 приведена схема проверки гипотез с использованием механизма вложения свойств. В целом рис. 2 состоит из 3-х основных компонент: Числитель, Знаменатель и Результаты.

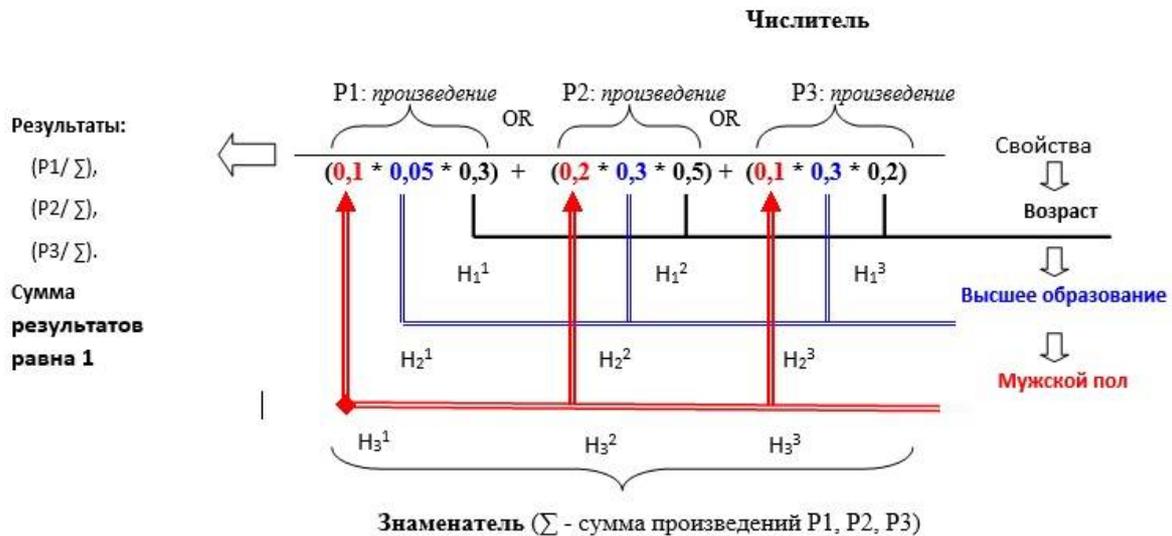


Рис. 2

Под длинной горизонтальной чертой размещается знаменатель, состоящий из 3-х слагаемых, каждое из которых представляет собой произведением 3-х чисел (в круглых скобках):

$$(0,1 * 0,05 * 0,3) + (0,2 * 0,3 * 0,5) + (0,1 * 0,3 * 0,2). \quad (3)$$

Крайние правые числа в этих скобках (0,3; 0,5; 0,2) представляют соответствующие вероятности гипотез $P(H_1^1)$; $P(H_1^2)$; $P(H_1^3)$ по свойству «Возраст».

Средние числа в скобках (3) представляют вероятности гипотез по свойству «Высшее образование» $P(H_2^1)$; $P(H_2^2)$; $P(H_2^3)$.

И, наконец, левые числа в скобках (1) представляют вероятности гипотез по свойству «Мужской пол» $P(H_3^1)$; $P(H_3^2)$; $P(H_3^3)$.

В сложившихся условиях можно проводить проверку гипотез на объекте с использованием множества различных свойств одновременно, - в рассматриваемом частном случае это по свойству «Возраст», по двум свойствам – «Возраст» и «Высшее образование», по трем свойствам - «Возраст», «Высшее образование» и «Мужской пол».

Интуитивно ясно, что возможности проверки гипотез с использованием нескольких свойств одновременно может в отдельных ситуациях значительно изменить достоверность гипотез (как в ту, так и в другую сторону).

Числитель на рис. 2 представляет альтернативные произведения, их 3: P1, P2, P3 по количеству результатов, которые приведены на рис.2.

Эксперименты со схемой множественного вложения свойств, приведенной на рис.2 получили довольно неожиданные результаты.

Таким образом, варианты использования множественных свойств и их инкапсуляции в задачах проверки гипотез дают исследователю новые возможности: управление апостериорными результатами, манипулирование гипотезами и как следствие – достижение желаемых результатов проверки.

Инструментальная схема рис. 2 легко развивается в различных направлениях: увеличение емкости капсул и их количества в соответствии с используемыми свойствами, развитие и использование промежуточных решений, сравнение вариантов по свойствам, наблюдение динамики гипотез и т.п.

Дальнейшее развитие описываемого метода будет направлено на тестирование модели и классификацию объектов на реальных данных.

Библиографический список

1. Кораблин М. А., Бедняк О. И. Категориальный анализ как метод оценки кредитоспособности клиента – физического лица// Экономический анализ: теория и практика, № 6, 2010, с. 18-24.
2. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Изд. Второе доп. – М.:Л.: 1934. 200 с.
3. [Электронный ресурс] URL: [http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy/1075], свободный доступ.
4. Инкапсуляция: Статья. [Электронный ресурс]. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Инкапсуляция>, свободный доступ.
5. Формула полной вероятности и формула Байеса: Учебник по теории вероятностей. [Электронный ресурс]. URL: http://www.matbuo.ru/tvbook_sub.php?r=par16, свободный доступ.
6. Бедняк О.И. Решение задач идентификации скрытой сущности объекта в процессе принятия управленческих решений с помощью категориального анализа// «Системы управления и информационные технологии», выпуск «Перспективные исследования», № 1.1(43), 2011, с. 108-112.
7. Бедняк О.И. Категориальный анализ в задачах идентификации скрытой сущности объекта на примере скоринга // «Информационные технологии моделирования и управления», № № 1(66), 2011, с. 37-43.
8. Бедняк О.И., Кораблин М.А., Салмин А.А., Таев С.С. Категориальный анализ и оценка поведения клиентов для прогнозирования рыночных отношений // «Информационные технологии», 11, 2009, с. 47-50.
9. Бедняк О.И. Инкапсуляция свойств при решении задач проверки гипотез // «Информационные технологии моделирования и управления», № 2(86), 2014, с. 126-131.
10. Захарова О.И., Кораблин М.А., Множественность свойств как основа и механизм проверки гипотез// Научно технический журнал «Информационные системы и технологии» № 4 (84) июль-август 2014, стр.37-44
11. Захарова О.И., Кораблин М.А., Инкапсуляция свойств как основа и механизм проверки гипотез о состоянии социальных и экономических объектов// Системы управления и информационные технологии (перспективные исследования), № 2(56), июнь 2014, 31-35
12. Захарова О.И., Принятие управленческих решений на основе идентификации и выявления скрытой сущности объекта// Электронное научно – периодическое издание

«Экономика и социум», раздел «Информационные и коммуникативные технологии» № 2(11), май 2014

References

1. Korablin MA, Bednyak OI. Categorical analysis as a method of assessment of the client - individual // Economic Analysis: Theory and Practice, № 6, 2010, p. 18-24.
2. SN Bernstein, Probability. Ed. Additional second. - Moscow, Leningrad 1934. 200 p.
3. [Electronic resource] URL: [[http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy / 1075](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy/1075)], free access.
4. Encapsulation: Article. [Electronic resource]. URL: [http:// ru.wikipedia.org / wiki / Encapsulation](http://ru.wikipedia.org/wiki/Encapsulation), free access.
5. Formula of total probability and Bayes' formula: textbook on probability theory. [Electronic resource]. URL: [http://www.matburo.ru/ tvbook_sub.php? p = par16](http://www.matburo.ru/tvbook_sub.php?p=par16), free access.
6. Bednyak OI. Solving problems identifying the hidden essence of the object in making management decisions using categorical analysis / / "Control Systems and Information Technology" issue "Prospective studies», № 1.1 (43), 2011, p. 108-112.
7. Bednyak OI. Categorical analysis to identify problems hidden essence of the object on the example of the scoring / / "Information Technology Modeling and Control», № № 1 (66), 2011, p. 37-43.
8. Bednyak OI, Korablin MA, Salmin AA, Taev SS. Categorical analysis and evaluation of customer behavior to predict market relations // "Information Technology", 11, 2009, p. 47-50.
9. Bednyak OI. Encapsulation properties in solving problems of testing hypotheses // "Information Technology Modeling and Control», № 2 (86), 2014, p. 126-131.
10. Zakharova OI Korablin MA, as the basis for multiple properties and mechanism of testing hypotheses // Scientific and Technical Journal "Information systems and technologies» № 4 (84) July-August 2014 str.37-44
11. Zakharova OI Korablin MA, encapsulation properties of the basis and mechanism for testing hypotheses about the state of social and economic targets // Control systems and information technology (prospective study), № 2 (56), June 2014 31 -35
12. Zakharova OI Management decisions based on the identification and detection of hidden essence of the object // Electronic Scientific - periodical of Danie "Economy and Society", see "In-mation and communication technology» № 2 (11), May 2014

~ O.I. Zaharova

~ Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara

~ **The method of encapsulation properties to test hypotheses**

~ **Abstract:** The paper considers the actual problem associated with the testing of hypotheses about the state of social and economic institutions and their identification. The problem is solved by introducing the concepts of encapsulation and multiple properties of the analyzed object, which is the basis of identification.

~ **Keywords:** identification of objects, encapsulation properties, hypothesis testing.

АВТОМАТНАЯ МОДЕЛЬ ЧРЕЗВЫЧАЙНОЙ СИТУАЦИИ ТЕХНОГЕННОГО ХАРАКТЕРА

Аннотация: в статье разработана автоматная модель в динамике развития чрезвычайной ситуации техногенного характера, позволяющая выбирать наиболее оптимальную тактику действия спасательных служб и снизить экономические затраты государства.

Ключевые слова: Чрезвычайные ситуации, стадии развития ЧС, математическая модель, автомат Мура.

Введение. В результате возникновения чрезвычайной ситуации (ЧС) на опасном объекте может происходить гибель населения, ухудшаться здоровье граждан, сотрудников спасательных служб, привлекаемых для ликвидации чрезвычайной ситуации, что приводит к большому экономическому ущербу [1]. Последствия от чрезвычайных ситуаций существенно зависят от типа аварии, масштаба, обученности персонала объекта, населения, участников ликвидации аварии, эффективности их взаимодействия [2], технической оснащенности.

В результате техногенных аварий происходит существенное ухудшение условий жизнедеятельности или невозможность проживания в зонах при возникновении аварий, смертельное поражение, причинения вреда здоровью людей из числа персонала и случайных лиц, участников ликвидации, причинение значительного материального и экологического ущерба.

Защита личности, общества и государства, предотвращение угроз от чрезвычайных ситуаций техногенного характера, ликвидация их последствий являются приоритетным направлением национальных интересов. Ослабление государственного надзора, недостаточная эффективность правовых и экономических механизмов предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций увеличивают риск катастроф техногенного характера во всех сферах промышленной деятельности.

Развитие событий существенно зависит от условий, масштаба, характера чрезвычайной ситуации, последствия которой трудно предвидеть.

Для более детального изучения способов и путей ликвидации ЧС техногенного характера и снижения экономических затрат необходимо разработать модель развития самой ЧС.

Ранее в [3,4] было разработана модель, которая описывает содержание и последовательность отдельных спасательных служб в зависимости от изменения состояния ЧС.

Несмотря на разнообразие вариантов развития для каждого типа ЧС всегда можно выделить отдельные стадии развития ЧС и условия перехода от одной стадии к другой. Как правило, в ЧС техногенного характера выделяют следующие стадии:

ω_0 – стадия отсутствия ЧС;

ω_1 – стадия накопления отклонений от нормального состояния или процесса (стадия зарождения ЧС);

ω_2 – наличие события, лежащего в основе ЧС;

ω_3 – стадия особо опасного развития событий, во время которой происходит высвобождение источника опасности (энергии или вещества), приводящая к риску неблагоприятного воздействия на население, объекты и природную среду;

ω_4 – стадия затухания, которая хронологически охватывает период от перекрытия (ограничения) источника опасности, т.е. локализации чрезвычайной ситуации, до полной ликвидации её прямых последствий, проведение профилактических мероприятий.

Условия перехода от стадии к стадии описаны в таблице 1.

Таблица 1

Описание переходов между стадиями ЧС

Переход между стадиями	Обозначение	Условие возникновения событий, приводящих к переходу от стадии к стадии
$\omega_0 - \omega_0$	x_0	Отсутствие ЧС
$\omega_0 - \omega_1$	x_1	Нарушение технологического процесса, сбой подачи ресурсов, сложность технологий и т.п.
$\omega_1 - \omega_0$	x_2	Переход объекта ЧС в режим нормального функционирования в результате профилактических мероприятий, планово-предупредительных работ ГУ МЧС России на потенциально опасных и критически важных объектах.
$\omega_0 - \omega_2$	x_3	Возникновение события в результате резкого изменения внутренних или внешних причин (недостаточная квалификация и некомпетентность обслуживающего персонала, проектно-конструкторские недоработки, терроризм, войны, стихийные бедствия и т.п.).
$\omega_1 - \omega_2$	x_4	Накопление факторов риска до критического значения и возникновения событий, лежащих в основе ЧС.
$\omega_1 - \omega_1$	x_5	Процесс постоянного воздействия опасных факторов.
$\omega_2 - \omega_3$	x_6	Высвобождение источника опасности.
$\omega_2 - \omega_1$	x_7	Ликвидация событий, которые могли привести к ЧС.
$\omega_2 - \omega_2$	x_8	Наличие неустранимых чрезвычайных событий, которые могут привести к ЧС.

$\omega_3 - \omega_2$	x_9	Прекращение воздействия источника опасности.
$\omega_3 - \omega_3$	x_{10}	Неустраненный процесс высвобождения источника опасности (энергии или вещества).
$\omega_3 - \omega_4$	x_{11}	Устранение процесса высвобождения источников опасности.
$\omega_4 - \omega_4$	x_{12}	Постоянное действие остаточных факторов и сложившихся чрезвычайных условий.
$\omega_4 - \omega_0$	x_{13}	Переход объекта ЧС в режим нормального функционирования.
$\omega_2 - \omega_0$	x_{14}	Полная ликвидация событий, которые могли привести к ЧС.
$\omega_0 - \omega_3$	x_{15}	Резкое высвобождения источников опасности.

Полученное описание позволяет представить математическую модель ЧС техногенного характера в виде конечного автомата Мура [5,6] $A = (\Omega, X, \lambda)$ с алфавитом состояний $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_4\}$, алфавитом входов $X = \{x_1, \dots, x_{15}\}$, функции переходов λ . Автомат является неполным, т. к. переходы между некоторыми стадиями неосуществимы. Графически автомат A может быть представлен в виде диаграммы Мура (рис.1).

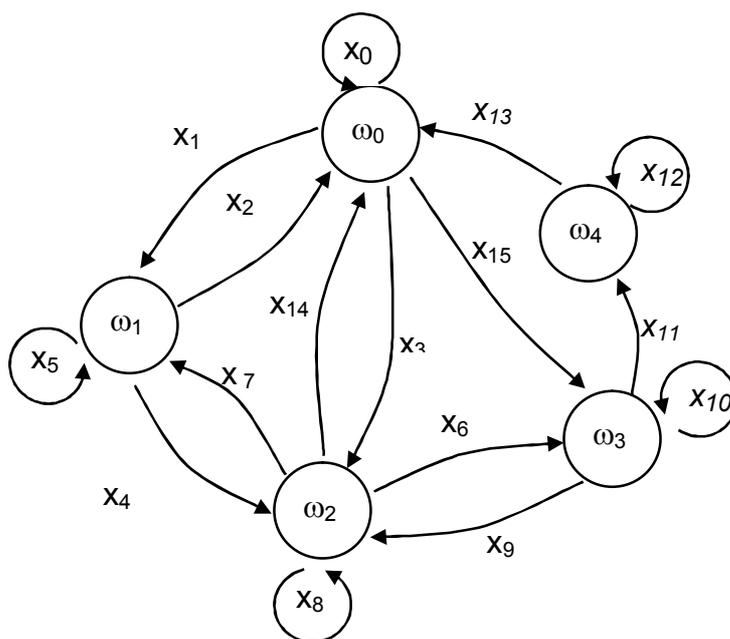


Рис 1. Диаграмма Мура автоматной модели развития ЧС техногенного характера.

Полученное описание позволяет представить математическую модель действий органов внутренних в динамике ЧС техногенного характера также в виде конечного автомата Мура $B = (S, Y, \mu)$ с алфавитом состояний $S = \{s_0, \dots, s_5\}$, алфавитом входов $Y = \{y_1, \dots, y_9\}$, функцией переходов μ .

В дальнейшем разработанные автоматные модели развития чрезвычайных ситуаций техногенного характера в процессе развития этих ЧС могут быть детализированы за счёт описаний работы отдельных

спасательных подразделений, что позволит осуществлять оценку эффективности действий служб спасения.

Полученная модель может быть использована для имитационного моделирования действий спасательных служб при возникновении аварии на потенциально опасном объекте. Результаты моделирования будут обладать большей информативностью за счёт большей детализированности описания.

Библиографический список

1. Беляев Г.Н. Методы оценки ущерба от техногенных чрезвычайных ситуаций / Беляев Г.Н // *Известия Томского политехнического университета*, 2008, № 5, том 312.
2. Кулемин В.В. Основы гражданской обороны. / Кулемин В.В., Селиванов С.Д., Самороковский А.Ф., Горлов В.В. // Воронеж, 2010. - 101 с.
3. Меньших В.В. Структурные модели взаимодействия подразделений силовых ведомств при возникновении чрезвычайных ситуаций техногенного характера / В.В. Меньших, А.В. Корчагин // *Труды Академии управления МВД России*, 2015. - № 2. - С.54-58.
4. Меньших В.В. Модель действий органов внутренних дел в чрезвычайной ситуации техногенного характера / В.В. Меньших, А.Ф. Самороковский, А.В. Корчагин // *Вестник Воронежского института МВД России*, 2013, №. 2, с. 164-171.
5. Меньших В.В., Математические методы и информационно-технические средства / Меньших В.В., А.Ф. Самороковский., А.В. Корчагин // *Труды VIII Всероссийской научно-практической конференции*, 22-23 июня 2012 г.- Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2012. – С 141-144
6. Кудрявцев В.Б. Введение в теорию автоматов / Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколотин А.С. // М.: Наука., 1985. – 320 с.

~ A.V. Korchagin

~ **Automatic model of man-caused emergency situation**

~ **Abstract:** The author suggests an automatic model of the dynamics of man-caused emergency situations, allowing you to select the most optimal tactics of rescue services operation and reduce state's economic costs.

~ **Keywords:** emergency situation, stages of development of ES, mathematical model, Moore machine.

УДК 004.42**О.Б. Кремер, С.Л. Подвальный, В.В. Журавлёва**ФГБОУ ВПО Воронежский государственный технический университет,
Воронеж, Россия.**РАЗРАБОТКА WEB-САЙТА НА ОСНОВЕ
КРОССПЛАТФОРМЕННОЙ ТЕХНОЛОГИИ PHP**

Аннотация. В статье рассматривается создание web-сайта на основе кроссплатформенной технологии PHP, предоставляющего информацию о кафедре, которая не отражена на официальном сайте университета.

Ключевые слова: Web-сайт, CMS, PHP, JavaScript, база данных, кафедра, кроссплатформенная технология.

В настоящее время сайт учебного заведения является своего рода представительством в Интернете, он может использоваться для сбора и накопления информации, необходимой для повышения качества и эффективности образования и так же является недорогим рекламным средством. Именно поэтому разработка сайта является довольно актуальной и востребованной задачей для кафедры вуза.

В статье представлено создание web-сайта на основе кроссплатформенной технологии PHP, предоставляющего информацию о кафедре автоматизированных и вычислительных систем (АВС) Воронежского государственного технического университета (ВГТУ), которая не отражена на официальном сайте вуза.

Веб-сайт – это совокупность программных, информационных, а также медийных средств, логически связанных между собой и объединённых под одним адресом в сети [1].

Под кроссплатформенной технологией понимают программное обеспечение, работающее более чем на одной аппаратной платформе или операционной системе [2].

Данный сайт предназначен для информационно-методической поддержки студентов и сотрудников кафедры в части предоставления такой информации о кафедре, как просмотр новостей и документов, расписание проведения занятий преподавателями кафедры в течение семестра, информация по дисциплинам для студентов, новости о конференциях для аспирантов.

Для того чтобы определиться со структурой и содержанием web-сайта были рассмотрены существующие сайты других кафедр, а также проведен анализ информации о кафедре АВС на официальном сайте ВГТУ.

Представим реализацию этапа проектирования web-сайта, в котором первым шагом было создание общей структуры сайта, подразделяемой на внутреннюю и внешнюю [3].

Внутренняя структура сайта – это упорядоченное размещение страниц сайта относительно главной страницы.

Внешняя структура сайта – это некий макет сайта, который определяет порядок размещения отдельных элементов сайта на его страницах.

Основываясь на анализе информации о кафедре на официальном сайте ВГТУ, а также сайтов других кафедр, была составлена следующая внутренняя структура сайта (рисунок 1).

В зависимости от типа информации, содержимое сайта будет выводиться на статических или динамических страницах.

Статические страницы целиком хранятся на сервере и показываются посетителю в своем неизменном виде. Подобный тип страниц обычно используется для вывода редко меняющейся информации.

Динамические страницы обрабатывают и выводят информацию из базы данных по запросу пользователя.

Главная страница сайта имеет первый уровень вложенности и содержит основную информацию о кафедре и последние новости.

Страница «О кафедре» имеет две вложенные страницы:

- «Новости кафедры» - динамическая страница, на которой располагаются объявления, новости, сведения о событиях кафедры, а также информация о сессиях для студентов и преподавателей данной кафедры;

- «Учебная программа» - статическая страница, которая содержит сведения о подготовке студентов кафедры, включая дисциплины из учебного плана.

Страница «Образование» имеет четыре вложенные страницы:

- «Абитуриентам» - статическая страница, на которой представлена информация для поступающих в университет по профилю и направлению кафедры;

- «Студентам» - динамическая страница, содержащая материал для самостоятельной работы, также она включает страницу третьего уровня «Новости для студентов», на которой располагаются новости и объявления, касающиеся непосредственно студентов кафедры;

- «Магистрам» - статическая страница, содержащая информацию для магистров кафедры, включая сведения об экзаменационной сессии;

- «Аспирантам» - статическая страница, содержащая краткие сведения об аспирантуре.

Страница «Сотрудникам» имеет две вложенные страницы:

- «Новости для сотрудников» - динамическая страница, которая содержит новости и объявления для преподавателей;

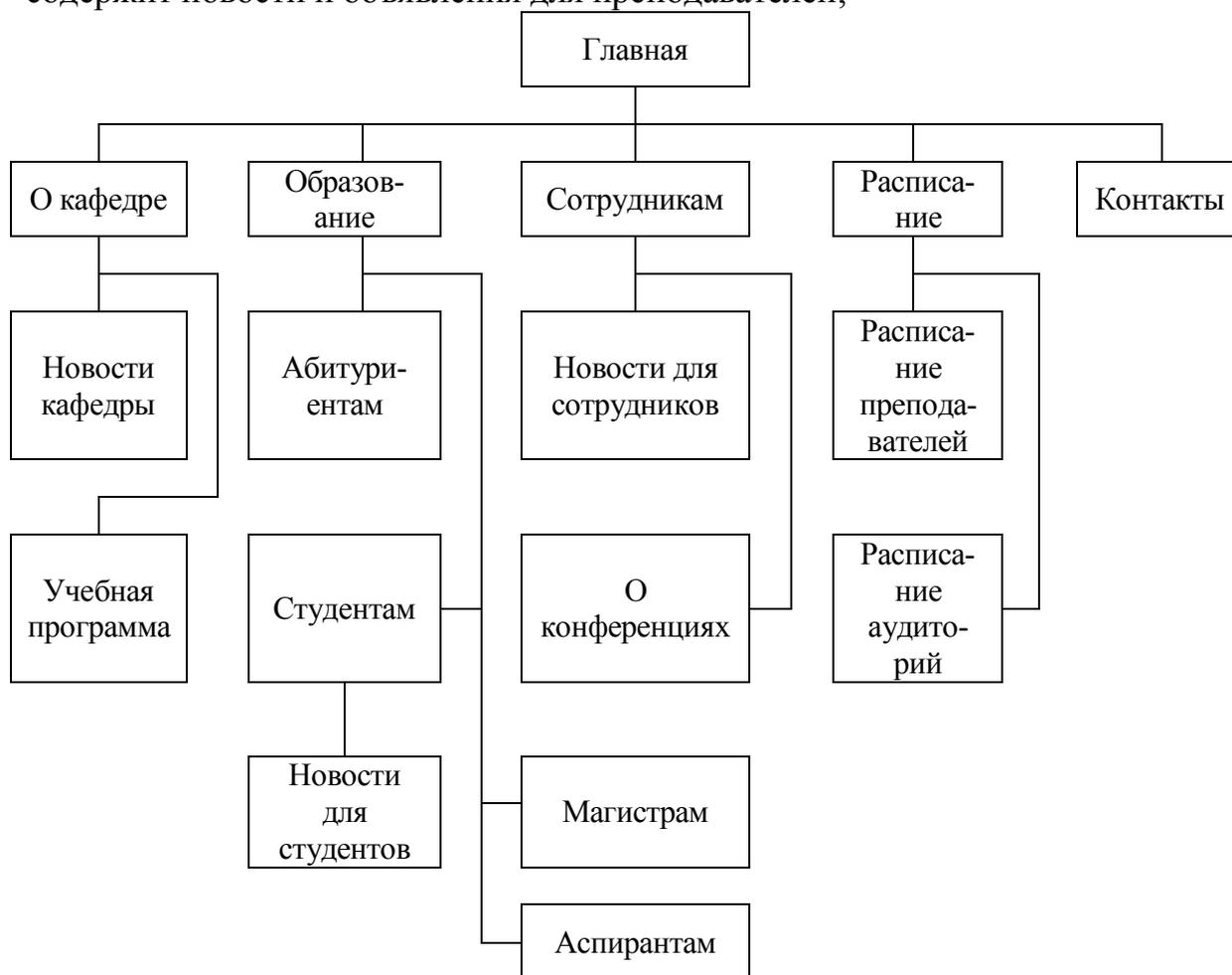


Рисунок 1. Внутренняя структура сайта

- «О конференциях» - динамическая страница, информирующая сотрудников кафедры о различных конференциях, в которых они могут принять участие.

Страница «Расписание» имеет две вложенные страницы:

- «Расписание для преподавателей» - динамическая страница, которая содержит расписание занятий, сгруппированное по преподавателям кафедры, с возможностью сортировки;

- «Расписание для компьютерных аудиторий» - расписание, в котором отражена информация о загрузке компьютерных аудиторий кафедры.

Раздел «Контакты» представляет собой статичную страницу, на которой представлена информация о расположении кафедры, ее контактных телефонах, почтовом адресе и режимах работы.

Далее была разработана внешняя структура сайта для статических и динамических страниц каждого уровня вложенности.

На следующем шаге этапа проектирования сайта была разработана структура взаимосвязанных таблиц БД сайта (рисунок 2).

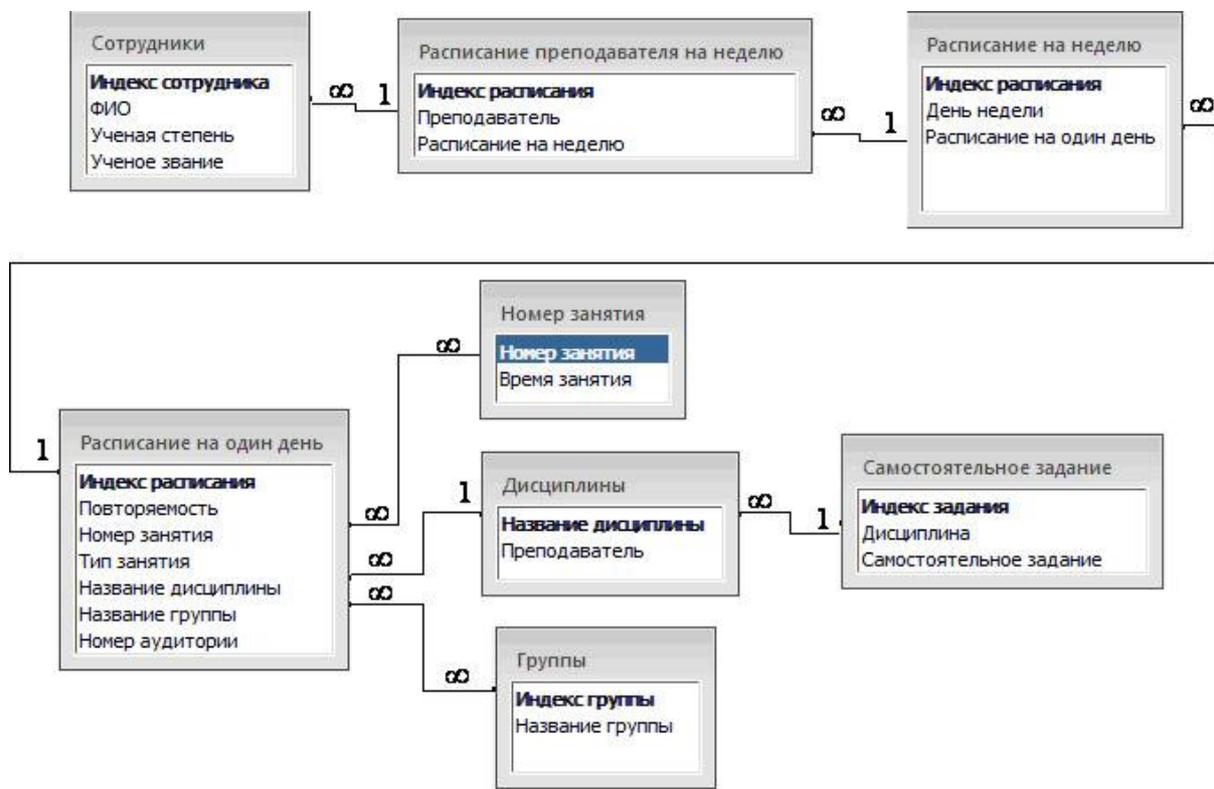


Рисунок 2. Структура связанных таблиц БД сайта

Далее был обоснован выбор технологий, языков и средств для разработки сайта.

В качестве языка разметки и таблицы стилей выбраны HTML5 и CSS3, как наиболее распространенные, легкие в усвоении и содержащие все необходимое для отображения информации технологии. Они поддерживаются большинством браузеров, а также позволяют создавать адаптивный дизайн, дающий возможность удобно просматривать сайт с устройств различных расширений и форматов.

Для расширения возможностей HTML и CSS будет использоваться клиентский язык JavaScript. Он полностью интегрируется с браузерами и может придать больше динамики web-странице.

В качестве серверного языка выбран язык написания сценариев PHP, чьими преимуществами являются: сравнительно простой синтаксис, гибкость по отношению к потребностям разработчиков, поддержка большого количества операционных систем и web-серверов, возможность обрабатывать сценарии с достаточно высокой скоростью, а также безопасность.

Для хранения сортировки и поиска информации будет использоваться СУБД MySQL, у которой хорошо проработанная интеграция с языком PHP. Данная СУБД поддерживается множеством серверов, хостингов, систем управления контентом.

За обработку запросов от клиента к сайту будет отвечать web-сервер Apache, как наиболее эффективная, потребляющая мало ресурсов, надежная и стабильная система.

Для управления сайтом и удобного наполнения его содержимым выбрана CMS Drupal, обладающая большой функциональностью, позволяющая работать с любыми типами материалов, категоризировать все виды содержимого и настраивать их отображение. Также в Drupal можно настроить роли для разных пользователей и создать для каждого особое меню для работы с материалами сайта.

В качестве серверной платформы и программной будет выступать Open Server, который обеспечивает удобство разработки, отладки и тестирования сайта, а также имеет в своем составе портативные программы для работы с СУБД, графикой и кодом.

Представим создание типов материалов в системе управления контентом Content System Management (CMS) Drupal [4].

Каждый элемент содержимого в CMS Drupal, будь то статическая страница или блог, называется узлом. В состав системы входят два predefined типа материала: статичный материал - основная страница, и динамичный материал - статья. Изначально все типы материала имеют в своем составе только заголовок, тело содержимого, имя автора, создавшего материал и дату создания. Но в Drupal также есть возможность создавать свои типы материалов.

У полей могут быть такие типы, как текстовый, числовой, логический, дата, список, изображение, ссылка на термин. Для подключения некоторых типов полей, например, для файла и коллекции полей в CMS необходимо устанавливать дополнительные модули.

Отдельное внимание следует уделить терминам. Это особый элемент системы Drupal, который входит в состав словарей. Словари позволяют группировать материалы, по тем или иным признакам, а инструмент, позволяющий это, называется таксономией.

Первым типом материала, созданным для данного сайта, являются «Новости». В отличие от стандартного типа «Статьи», имеющим только заголовок и содержимое, в его структуру добавлено поле «Изображение» с типом файл и текстовый список «Категории», в который вошли следующие значения: новости кафедры, новости для сотрудников и новости для студентов. Изображение будет выводиться вместе с анонсом в списке новостей, а значение категории будет определять раздел сайта, в который будет помещена та или иная новость.

Второй тип материала - «Объявления». Так как объявления чаще всего являются короткими сообщениями, то из его представления будет убран переход на детальную страницу, так же, как и у новостей, помимо заголовка и тела содержимого сюда будет добавлен текстовый список, отражающий его назначение: студентам, магистрам, аспирантам, преподавателям.

Также созданы два типа «Расписание для аудиторий» и «Расписание для магистров». В данном случае расписание представляет собой файл, доступный для скачивания и для просмотра в режиме онлайн. Эта возможность реализована с помощью технологии Google Docs.

Прежде чем переходить к созданию типа материала «Расписание для преподавателей» необходимо с помощью инструмента таксономия сформировать словари преподавателей, дисциплин и групп. Тип «Словарь» обычно применяется к меняющимся данным, таким образом впоследствии редактор сайта сможет легко создавать, изменять или удалять нужные термины. Значения полей для каждого словаря представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения терминов словарей

Название словаря	Метка	Тип поля	Виджет	Возможные значения
Преподаватели	Имя	Название термина		
	Ученая степень	Список (текст)	Выбор из списка	К.т.н Д.т.н Д.ф.-м.н
	Ученое звание	Список (текст)	Выбор из списка	Доцент Профессор Старший преподаватель
Список предметов	Название	Название термина		
	Преподаватель	Ссылка на термин	Выбор из списка	Словарь «Преподаватели»
	Самостоятельное задание	Файл	Файл	
Группа	Название	Название термина		
Время занятия	Номер занятия	Название термина		
	Время	Список (текст)	Выбор из списка	8:30 - 10:05 10:15 - 11:50 12:00 - 13:35 14:05 - 15:40 15:50 - 17:20 17:30 - 19:05

Тип материала «Расписание для преподавателей» предполагает создание расписания на неделю только для одного преподавателя, которое впоследствии объединится с другими расписаниями в одной таблице.

Чтобы иметь возможность добавлять в поле «День» расписание нескольких занятий, а в поле «Неделя» – расписание нескольких дней, следует воспользоваться типом поля «Коллекция полей».

Представим вид одной из коллекций полей, которая называется «Расписание на один день» (таблица 2).

Таблица 2. Вид коллекции полей «Расписание на один день»

Метка	Тип поля	Виджет	Возможные значения
Повторяемость	Список (текст)	Выбор из списка	Каждый день Числитель Знаменатель
Номер занятия	Ссылка на термин	Выбор из списка	1 – 6
Тип занятия	Список (текст)	Выбор из списка	Лекция Практика Лаб. работа Семинар
Название предмета	Ссылка на термин	Автозавершение ввода	Словарь «Предмет»
Название группы	Ссылка на термин	Выбор из списка	Словарь «Группа»
Номер аудитории	Текст		

Коллекция полей «Расписание на одну неделю» содержит текстовый список «День недели» с перечислением названия всех дней до субботы включительно, а также коллекцию полей «Расписание на один день».

Теперь в типе материала «Расписание преподавателей» достаточно включить два поля: «Имя преподавателя» со ссылкой на термин словаря «Преподаватели» и коллекцию полей «Расписание на неделю».

В результате реализации рассмотренных шагов проектирования сайт был создан и выложен на сервере по адресу <http://vorstu-avs.esy.es>.

Представим основные страницы сайта для неавторизованного пользователя.

Главная страница сайта «Кафедра автоматизированных и вычислительных систем» представлена на рисунке 3.

В шапке страницы в левом углу расположен логотип и название вуза, а также название кафедры, которой посвящен сайт. Этот блок является интерактивным и ведет на главную страницу сайта.

В правом углу шапки страницы расположен блок учебного календаря, показывающий текущую дату, номер учебной недели и ее тип (числитель или знаменатель), а также форма поиска.

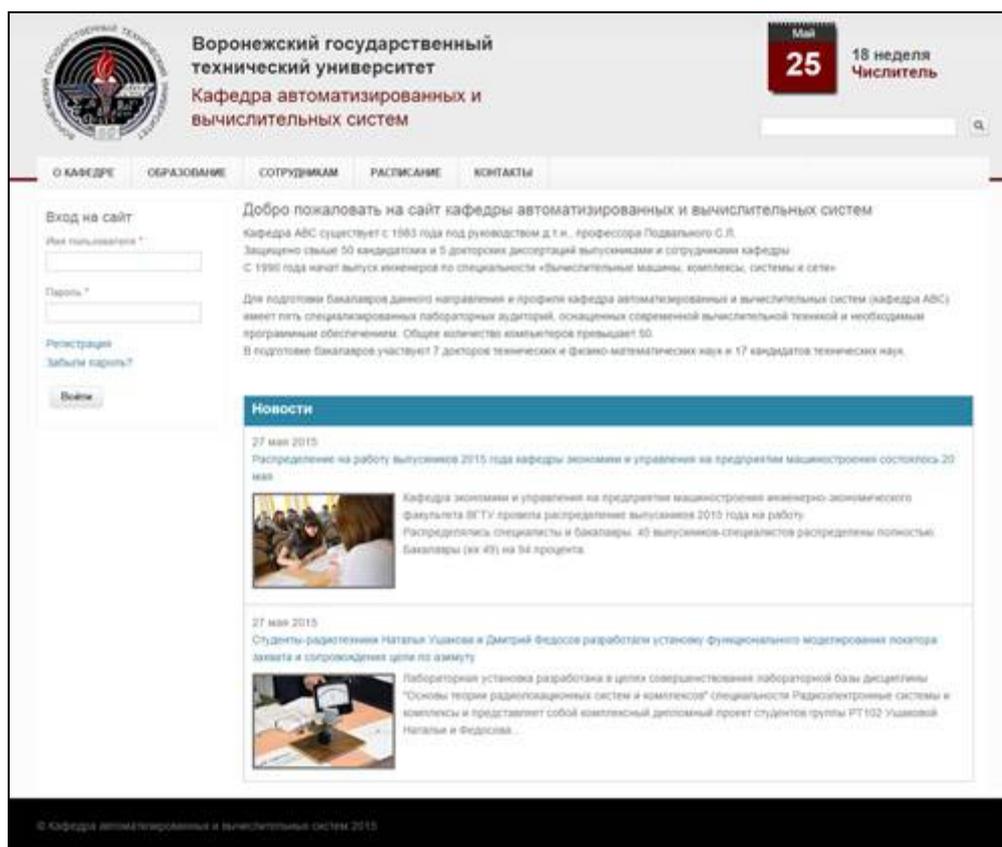


Рисунок 3. Главная страница сайта

Ниже располагается горизонтальное главное меню, представляющее основные разделы содержимого сайта. При наведении на какой-либо пункт меню вызывается раскрывающееся меню, которое отражает его подразделы.

В подвале страницы содержится название кафедры, год создания сайта и текущий год.

В левой части страницы расположен блок авторизации пользователя, так же там может располагаться дополнительное меню и блок последних новостей, представленный в сокращенном виде.

В контентной части главной страницы присутствует краткое описание кафедры АВС, а также блок последних новостей, включающий дату создания новости, ее заголовок, анонс и картинку, если такая имеется. Заголовок является интерактивным и ведет на детальную страницу новости.

Разделы «Учебная программа» в пункте меню «О кафедре», а также разделы «Абитуриентам» и «Аспирантам» в пункте «Образование» имеют текстовый вид страницы, пример которой показан на рисунке 4.

Главная » О кафедре » Учебная программа

Учебная программа

Направление и профили обучения

На кафедре автоматизированных и вычислительных систем с 2011 года осуществляется двухуровневая подготовка по направлению «Информатика и вычислительная техника» (бакалавры - 1 уровень, магистры - 2 уровень). Набор бакалавров осуществляется по профилям:

- Вычислительные машины, комплексы, системы и сети;
- Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем.

Бакалавры проходят обучение:

- 4 года по полной программе;
- 3 года по сокращенной программе для выпускников профильных средних специальных учреждений.

Квалификация выпускника первого уровня - бакалавр.

Набор в магистратуру осуществляется по магистерской программе "Распределенные автоматизированные системы". Магистры проходят обучение в течение двух лет на бюджетной основе.

Рисунок 4. Вид текстовой страницы сайта

Раздел «Студентам» представляет собой список дисциплин, преподаваемых на кафедре, на детальных страницах которых представлена информация о преподавателе данной дисциплины, а также файлы с заданиями для самостоятельной работы, доступные для скачивания.

В разделе «Магистрам» из пункта меню «Образование» располагается документ расписания занятий или экзаменационных сессий для магистров. Документ доступен для скачивания и просмотра в режиме онлайн. Подобный вид представления имеет раздел «Расписание аудиторий», в котором отражена занятость компьютерных аудиторий кафедры.

Расписание преподавателей представляет собой таблицу, в которой содержится расписание занятий для каждого преподавателя кафедры. Таблицу можно отсортировать по фамилии преподавателя в порядке убывания или возрастания, нажатием на заголовок ячейки таблицы «Преподаватель» (рисунок 5).

Преподаватель	День недели	Время занятия	Название предмета	Название группы	Номер аудитории
Барабанов Владимир Федорович к.т.н. доцент	Среда	Каждую неделю 3-я пара 12:00 - 13:35	Автоматизация проектирования вычислительных систем лекция	ВМ-121	324
		Каждую неделю 5-я пара 15:50 - 17:20	Программир. в VHDL лаб. раб.	ВМ-111	324
		Каждую неделю 6-я пара 17:30 - 19:05			
	Четверг	Каждую неделю 3-я пара 12:00 - 13:35	Программирование в VHDL лекция	ВМ-111	324

Рисунок 5. Расписание преподавателей

Для того чтобы войти на сайт кафедры ABC в качестве редактора, пользователю необходимо ввести в строке браузера адрес сайта <http://vorstu-avs.esy.es>, затем в форме авторизации, расположенной в левой части страницы в полях «Имя пользователя» и «Пароль» ввести необходимые данные.

После этого пользователю будет доступно новое меню «Меню редактора», в котором отражены функции по добавлению и редактированию материалов разных типов. Также сверху каждой детальной страницы появится надпись «Правка», которая позволит изменить опубликованный материал.

Для того чтобы создать статичную информационную страницу необходимо в меню редактора выбрать пункт «Основная страница». После этого редактору сайта откроется страница создания данного типа материала (рисунок 6), на которой необходимо ввести заголовок страницы и ее содержимое. В блоке «Содержимое» пользователю доступен текстовый редактор, который позволит форматировать текст, вставлять картинки, ссылки и якоря.

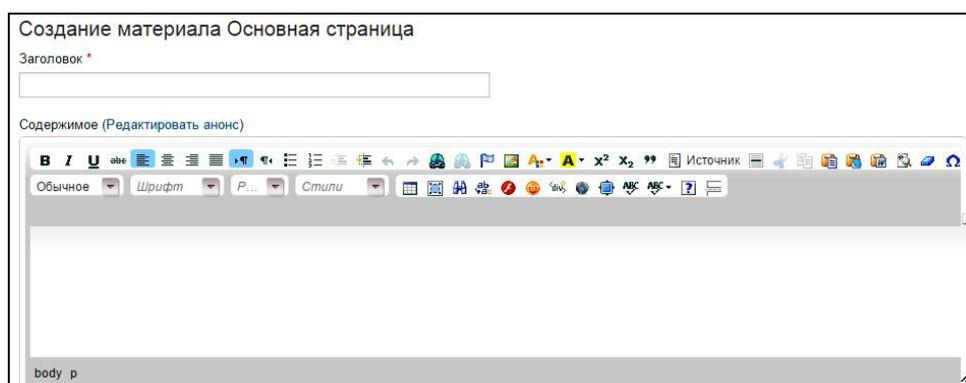


Рисунок 6. Страница создания материала «Основная страница»

Ниже располагается блок настроек страницы, который имеет одинаковый вид для всех типов материалов. Основными функциями в этом блоке является настройка меню и публикации.

В настройках меню при нажатии на надпись «Создать ссылку в меню» появится поле для задания адреса ссылки меню, поле для выбора родительского раздела и поле «Вес», который отражает расположение пункта меню (чем он меньше, тем выше или левее будет располагаться пункт).

В настройках публикации пользователю доступно три функции: опубликовать материал, поместить его на главную страницу и закрепить вверху списков. После заполнения необходимых полей можно выполнить предварительный просмотр страницы, нажатием на одноименную кнопку и сохранить материал.

Создание материала «Новости» отличается от создания статичной страницы необходимостью выбрать категорию «Новости», которая

определит ее расположение после публикации, также по желанию можно заполнить текст анонса и выбрать для него изображение.

Для создания объявления вместо категории выбирается «Тип объявления»: студентам, магистрам, аспирантам, преподавателям или о конференции. От него будет зависеть внешний вид объявления и расположение объявления после публикации.

Списки преподавателей, групп и предметов имеют одинаковый внешний вид, но разное содержание (рисунок 7). Отсюда можно изменять элементы и отсортировать их по алфавиту с помощью одноименных команд.

Имя	Действия
* Агранович Юрий Яковлевич	изменить
* Акинина Юлия Сергеевна	изменить
* Барабанов Александр Владимирович	изменить
* Барабанов Владимир Федорович	изменить
* Ганцева Екатерина Александровна	изменить
* Гребенникова Наталия Ивановна	изменить
* Кравец Олег Яковлевич	изменить
* Кремер Ольга Борисовна	изменить
* Леденева Татьяна Михайловна	изменить

Рисунок 7. Вид списка преподавателей

Добавить элемент (преподавателя, группу, дисциплину) можно либо из страницы списков с помощью команды «Добавить термин», либо напрямую из меню редактора сайта.

Для того чтобы удалить элемент, необходимо перейти в режим редактирования и нажать на кнопку «Удалить».

Для добавления преподавателя в список необходимо ввести его фамилию, имя и отчество в графу «Имя», выбрать из списка ученую степень и звание.

Для добавления дисциплины в список необходимо ввести ее название в графу «Имя».

Также можно выделить преподавателя, который ведет этот предмет, если преподавателей несколько, то выделять их нужно, удерживая клавишу Ctrl.

Ниже располагается блок «Самостоятельное задание», где можно загрузить необходимые файлы с помощью команд «Выбрать файл» и «Закачать», либо удалить ненужные кнопкой «Удалить» (рисунок 8).

Однокристалльные микроЭВМ

Просмотр **Правка**

Имя *
Однокристалльные микроЭВМ

Преподаватель
Носачева Майя Павловна
Нужный Александр Михайлович
Олейникова Светлана Александровна
Петружнова Галина Викторовна

Самостоятельное задание

Показать вес строк

Информация о файле	Действия
* samostoyatel'naya_rabota_dlya_gruppy_vm-111.doc (109.5 КБ)	Удалить
* samostoyatel'naya_rabota_dlya_gruppy_vm-121.doc (109.5 КБ)	Удалить
* samostoyatel'naya_rabota_dlya_gruppy_ivt-131.doc (109.5 КБ)	Удалить
* samostoyatel'naya_rabota_dlya_gruppy_ivt-132.doc (109.5 КБ)	Удалить

Добавить новый файл
Выберите файл | файл не выбран | Закачать

Рисунок 8. Страница добавления дисциплины

Расписание для каждого преподавателя заполняется отдельно, поэтому при его создании необходимо задать уникальный заголовок расписания, например, имя преподавателя (рисунок 9).

Создание материала Расписание преподавателя на неделю

Имя преподавателя *
Холопкина Людмила Владимировна

Преподаватель *
Сергеев Михаил Юрьевич
Сергеева Татьяна Ивановна
Тюрин Сергей Владимирович
Холопкина Людмила Владимировна

Показать вес строк

Расписание преподавателя на неделю *

День недели *
Понедельник

Показать вес строк

Расписание на один день *

Повторяемость *
Числитель

Номер занятия *
3-я пара
4-я пара
5-я пара
6-я пара

Тип занятия *
лекция

Название предмета *
Методы оптимизации

Название группы *
VM-111

Номер аудитории *
320

Удалить

Добавить ещё

Рисунок 9. Страница создания расписания для преподавателя

Таким образом, представленные этапы проектирования и используемые технологии позволили создать web-сайт, предоставляющий информацию о кафедре АВС ВГТУ, которая является дополнительной к официальному сайту вуза, и при регулярном обновлении информации будет востребована участниками учебного процесса.

Библиографический список

1. Проектирование и разработка Web-сайтов [Электронный ресурс] : Режим доступа : World Wide Web. URL : http://wapref.ru/referat_merujgujgotrotrqas.html
2. Свободная энциклопедия Википедия [Электронный ресурс] : Режим доступа : World Wide Web. URL : https://ru.wikipedia.org/wiki/Кроссплатформенное_программное_обеспечение
3. Подвальный, С.Л. Основы интернет-технологий [Текст]: учеб. пособие / С.Л. Подвальный, О.Б. Кремер, Д.И. Кардаш; Воронеж. гос. техн. ун-т, Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 2008. – 153 с. - ISBN: 978-5-86911-738-0
4. Ромашов, В. CMS DRUPAL: система управления содержимым сайта [Текст] / В. Ромашов – СПб.: Питер, 2010. – 256 с.

~ О. В. Kremer, S.L. Podvalny, V.V. Zhuravleva

Development of Web-site based on cross-platform PHP technologies

~ **Abstract.** The article discusses the creation of a website based on a cross-platform PHP technologies that provides information about the Department, which was not reflected on the official website of the University.

~ **Keywords:** Web site, CMS, PHP, JavaScript, database, Department of the University, cross-platform technology

УДК 681.3

М.В. Локтева

ФГБОУ ВПО Воронежский государственный технический университет,
Воронеж, Россия

МОДЕЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОТОКА ДАННЫХ НА КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Аннотация. В работе рассматриваются особенности реализации расчета в системах потоковой передачи данных, с применением моделей разложения на элементы бесконечно длинной последовательности

Ключевые слова: Поток данных, сумма корреляции, функция разложения, хеш-функция.

Введение. Механизм обработки данных с использованием хеш-функции $h(x) = (ax + b) \bmod p$ [1] в моделях потоковой передачи обеспечивает:

повышение производительности системы, уменьшение временных рамок обработки потока, снижение требований к ресурсам памяти. Первоначальная задача обработки потока данных - поддержка передачи IP-пакетов без задержки в течение рабочего времени. Эта задача выполнима при следующем условии: пакеты могут передаваться многократно, если размер не превышает установленное пороговое значение τ , ограниченное временем выполнения запроса.

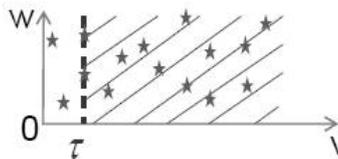
Требования к обработке потока:

Обработка потока за один цикл.

Использование малой области памяти в полулогарифмическом масштабе данных.

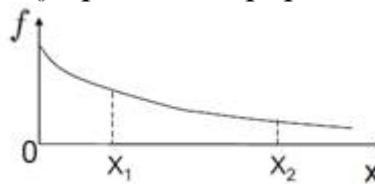
Быстрое время обработки одного элемента потока.

Модель потока и сумма корреляции. Представим поток данных как $R = (v_i, w_i, t_i), \dots, (v_n, w_n, t_n)$, где каждый элемент имеет: v_i - значение, w_i - вес, t_i - метку; сумму корреляции выразим как $S_\tau = \sum_{v_i, w_i, t_i \in R, v_i \geq \tau} W_i$. τ ограничено временем выполнения запроса [2-4] и является любым целым числом при условии $v \geq \tau$. Выбор элементов суммы W_i :



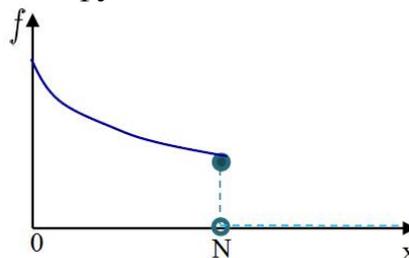
Время разложения потока данных. Так как данные моделируются по времени и функции разложения, важны последние найденные потоковые элементы.

Разложение функции $F()$ продемонстрировано на графике:

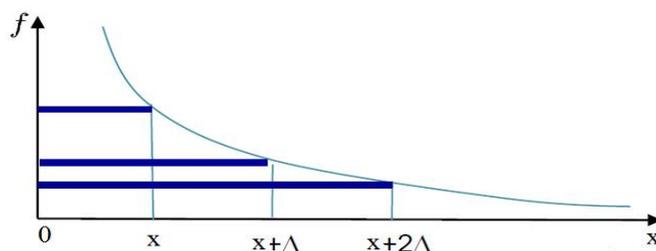


Время разложения элемента (v_i, w_i, t_i) в некоторый момент c равно $w \cdot f(c-t)$. Где $c-t$ параметр элемента на временной оси c .

1. Исходное разложение функции:



2. Конвергенция функции $F(X)/F(x+1)$. Наблюдается экспоненциальный спад по оси x , полиномы разложены в полулогарифмическом масштабе данных.



Одним из условий применения метода суммы корреляции к потоковым данным является введение следующих значений: $R = (v_i, w_i, t_i), \dots, (v_n, w_n, t_n)$ и функции разложения $F(X)$, рассмотренных в работах [5-6]. Где задача значения τ в любое время c поддерживать условие $S_\tau^f = \sum_{(v, w, t) \in R, v \geq \tau} w \cdot f(c-t)$.

Даже если $f(x) \equiv i$ для получения результата с точным значением без погрешности, необходимо привести $\overline{S_\tau^f}$ к оценке S_τ^f [7]. Так как $S_\tau^f = \sum_{(v, w, t) \in R, v \geq \tau} w \cdot f(c-t)$, возможны два варианта проверки на погрешность:

$$1) \ \varepsilon\text{-дополнение погрешности: } \left| \overline{S_\tau^f} - S_\tau^f \right| < \varepsilon \cdot S_0^f.$$

2) ε -сравнение погрешности: $\left| \overline{S_\tau^f} - S_\tau^f \right| < \varepsilon \cdot S_\tau^f$ (значительно лучше в точности).

Внесение изменений в процесс разложения потока данных на элементы показан на рисунке 1.



Рис. 1 - Модели разложения

- Рассмотрено экспоненциальное разложение потока данных, где:
- поток $R = (v_i, w_i, t_i), \dots, (v_n, w_n, t_n)$, где $v_i \in [1..m]$;
 - экспоненциальный спад $f(x) = 2^{-ax}, a > 0$;
 - нижняя граница области памяти $\left| \overline{S_\tau^f} - S_\tau^f \right|$ для любого значения τ в

пределах $\Omega(m \log \frac{n}{m})$ бит вычислительной сложности [2].

Искомый результат достигается при экспоненциальном разложении $F(X) = 2^{-x}$ на нижней границе памяти $\Omega(m)$ бит и сводится к типовому уровню l для процедуры отбора образцов n -поточковых элементов. Проблема индексирования в теории погрешностей сводится к условию $\overline{S_\tau^f}$, когда $f(x) = 2^{-x}$ в пространстве l/V .

Описание задачи. Пусть Процессор-А имеет некоторый вектор V $[1, 1, 0, \dots, 1]$ длины n . Процессор-В ищет в потоке элемент $V[k]$, где $k \in [1, n]$ целое число. Только Процессору-А разрешено отправлять сообщения Процессору-В. Размеры сообщения должны быть $\Omega(n)$ бит, что бы Процессор-В мог выявить $V[k]$ с учетом протокола вероятности отказа [7].

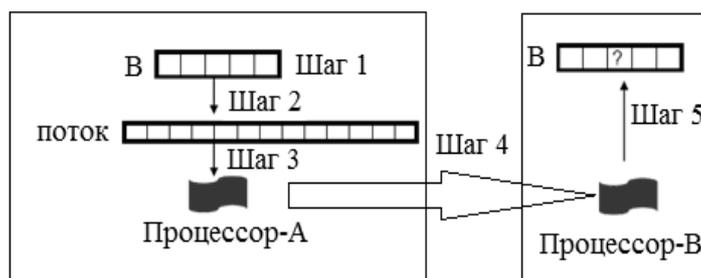


Рис. 2 - Пошаговое представление обращений Процессора-А

Шаг 1: Процессор-А имеет бит-вектор V .

Шаг 2: Процессор-А создает поток данных на основе вектора V .

Шаг 3: Процессор-А обрабатывает поток с использованием условия S_τ^f .

Шаг 4: Процессор-А посылает структуру данных Процессору-В, полученную после обработки потока.

Шаг 5: Процессор-В использует структуру данных для поиска необходимого элемента $V[k]$.

Поскольку Процессор-В может выявить $V[k]$ с использованием структуры данных, размер структуры данных не должен превышать $\Omega(|B|)$ бит.

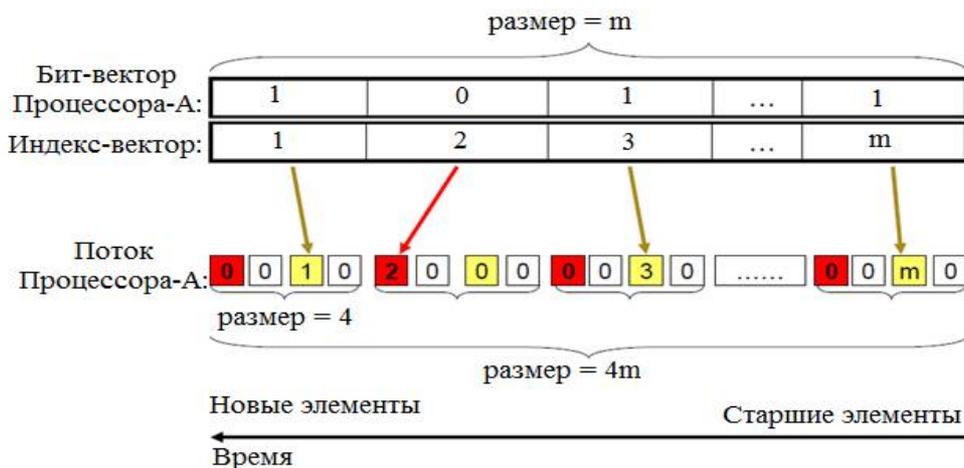


Рис. 3 - Создание потока данных

Как показано на рисунке 3, Процессор-А создает поток данных на основе битового вектора.

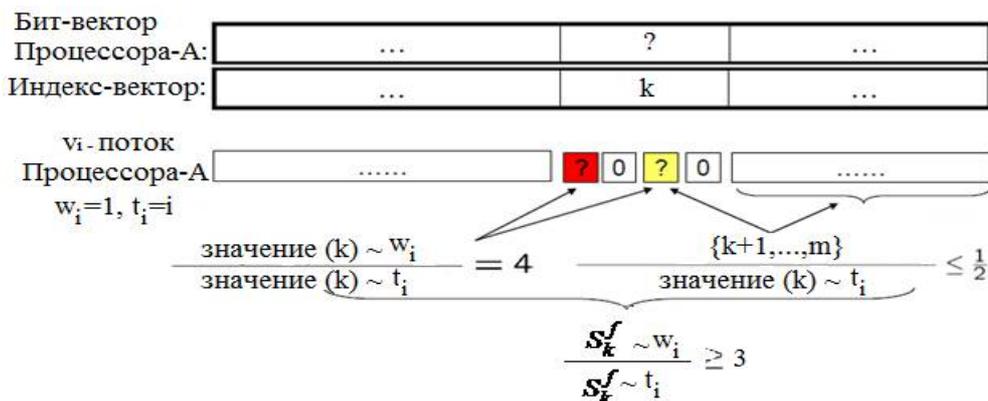


Рис. 4 - Поиск Процессором-В элемента V[k]

Если выполняется условие $\left| \overline{S_k^f} - S_{\tau}^f \right| < S_k^f / 2$, то Процессор-В находит элемент $V[K]$ в структуре потока данных $\Omega(m)$ бит. Поскольку нет ограничений обращения Процессора-А к потоку, возможна многократная обработка процесса.

Экспериментальные результаты [3] реализованные с использованием: библиотеки стандартных шаблонов C++/STL, операционной системы SUSE Linux, процессором частотой 2 ГГц и памятью 1 Гб, проведены с наборами данных в 33695769 записей, показали: уменьшение объема памяти в пределах 1Кб-100Кб, среднюю пропускную способность 300Кб записей в секунду при относительной погрешности 15Кб записей в секунду.

Заключение. Было проведено полное разложение потока данных по времени на корреляционную сумму элементов. Использован эффективный алгоритм сокращения задействованной области памяти.

Библиографическият списък

1. Kravets O.Ja., Lokteva M.V. Computation in data stream systems. Modern Informatization Problems: Yelm, WA, USA, «Science Book Publishing House», 2014, -P. 172-177.
2. Alon N., Gibbons P. B., Matias Y., Szegedy M. Tracking algorithms for join and self-join sizes. In Proc. 18th ACM Symp. on Principles of Database Systems, -P. 1-11, May 1999.
3. Alon N., Matias Y., Szegedy M. The space complexity of approximating the frequency moments. Journal of Computer and System Sciences, 58(1): -P. 137-147, 1999.
4. Babcock B., Babu S., Datar M., Motwani R., Widom J. Models and issues in data stream systems. In Proc. 21st ACM Symp. on Principles of Database Systems (PODS), -P. 1-16, 2002.
5. J. Gehrke, F. Korn, D. Srivastava On computing correlated aggregates over continual data streams. SIGMOD . - 2001.
6. R. Ananthakrishna, A. Das, J. Gehrke, F. Korn, S. Muthukrishnan, D. Srivastava Efficient Approximation of Correlated Sums on Data Streams. TKDE. - 2003.
7. Lokteva M.V., Kravets O.Ja. Distribution of information streams in the data exchange systems using a hash function. Modern Informatization Problems: Yelm, WA, USA, «Science Book Publishing House», 2015, -P. 308-313.
8. Rubinfeld R., Shapira A. Sublinear time algorithms. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 25(4):1562-1588, 2011.
9. Shrivastava N., Buragohain C., Agrawal D., Suri S. Medians and beyond: new aggregation techniques for sensor networks. In SenSys, pages 239-249, 2004.
10. Avseeva O.V., Kravets O.Ja., Tebekin Ju.B. Multiphase design and minimization of losses between interfaces. -Yelm, WA, USA, 2013.
11. Govorskii A.E., Kravets O.Ja. Mathematical Modeling of Inhomogeneous Traffic in a Heterogeneous Integrated Corporate Data Control Systems//Automation and Remote Control, Vol. 73, No. 7, 2012. -P. 1269-1278.
12. Kravets O.Ya., Makarov O.Yu., Oleinikova S.A., Pitolin V.M., Choporov O.N. Switching subsystems within the framework of distributed operational annunciator and monitoring systems: program design features//Automation and Remote Control, Vol. 74, No. 11, 2013. -P. 1919-1925.
13. Beletskaya S.Yu., Zolnikov V.K., Kravets O.Ja., Lapshina M.L., Podvalny E.S. Specific Features of Modeling and Developing the Mathematical and Program Software for Designing Intranet-Interfaces during Competitive Development of Information Systems//World Applied Sciences Journal 23 (12): 64-70, 2013.
14. Kravets O.Ja., Kryuchkova I.N. Forecast of tax revenues based on discrete processes dynamics neural network simulation//American Journal of Economics and Control Systems Management, 2, 2013. -P. 3-10.
15. Kravets O.Ja. Individualization of training in informatics of technical college students: theoretical bases//American Journal of Pedagogy and Education. №2(2), 2013. -P. 19-25.

М.В. Локтева

Models of decomposition data flow on the correlation elements

Abstract. The paper discusses the features of the implementation of the calculation systems streaming, with application models of decomposition into elements infinitely long sequence

Keywords: Data stream, sum of correlation, function expansion, hash-function.

УДК 004.912**Л.С. Ломакина, А.С. Суркова**

ФБГОУ ВПО Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева (НГТУ), г. Нижний Новгород, Россия

**АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ
ОБРАБОТКИ ТЕКСТОВ**

Аннотация. В статье рассмотрены некоторые подходы к процедурам моделирования текстов и их анализу, используемые при обеспечении эффективного функционирования информационно-поисковых и информационно-аналитических систем, а также систем обеспечения информационной безопасности. Приведены примеры практической реализации методов классификации потоковых текстовых данных, анализа тональности отзывов и определения авторства исходных кодов программ.

Ключевые слова: анализ и обработка текстов, модели текстов, потоковые текстовые данные, идентификация авторства.

В настоящее время возрастает потребность постоянной обработке текстовой информации из различных источников (художественные и научные тексты, сообщения из сети Интернет, тексты из системы документооборота и т.п.) и, соответственно, в повышении качества и эффективности методов анализа и моделирования текстовых структур. К задачам обработки текстов могут быть отнесены:

- разбиение текстов по тематическим или иным признакам;
- анализ текстов в социальных сетях для выявления характеристик их авторов и обнаружения предпосылок к нежелательным действиям;
- разделение документов по группам в специализированных информационно-поисковых системах;
- выявление и проверка различных характеристик текста, в том числе текстов исходных кодов программ, проверка возможности использования их в качестве идентификационных признаков;
- определение признаков автоматического перевода на основе выявления особенностей написания текстов на родном языке;

Все задачи можно разделить на три основные группы: задачи кластеризации, задачи классификации и задачи идентификации. При решении указанных задач и построении систем обработки текстов необходимо учитывать основные принципы анализа и моделирования текстов [1]. Принцип системного представления текстов позволяет учитывать структуру и внутренние закономерности текстов. Принцип нечеткой логики предполагает использование нечетких моделей при

представлении текстовых данных с применением качественных, неточных или неопределенных признаков. Принцип обучающихся систем предполагает построение систем, способных работать при недостатке априорной информации и улучшающих свое функционирование в процессе работы. Рассмотренные принципы позволяют представить совокупность обобщенных методов и алгоритмов решения основных задач обработки текстов и обеспечить эффективность работы информационно-поисковых и информационно-аналитических систем, а также систем обеспечения информационной безопасности [2].

Для решения задач кластеризации эффективно использование таких методов как методы, основанные на Колмогоровской сложности [5], модификации известных методов с учетом нечетких отношений, нейросетевые технологии, технологии на основе решающих деревьев. К перспективным методам решения задач классификации можно отнести классические методы опорных векторов и нечеткие модификации методов ближайших соседей [6], используемые для моделей текстов в виде деревьев и спектров N -грамм. Для решения задач идентификации целесообразно применение методов, основанных на расчете взаимной информации между элементами текста [4], энтропийных характеристиках символьного разнообразия, а также на нейросетевых технологиях.

В качестве примеров анализа и моделирования текстов для решения конкретных прикладных задач были рассмотрены анализ эмоциональной окрашенности текстовых отзывов, который может быть использован для построения рекомендательных систем, а также классификация потоковых текстовых сообщений и построение моделей текстов исходных кодов для их идентификации.

Построение эффективных рекомендательных систем остается актуальной задачей, однако большинство существующих методов опираются на прямые оценки пользователей или конкретные запросы. Однако более перспективным видится подход, основанный на учете информации из текстов отзывов и анализе их тональности (положительности или отрицательности). Для этого предложено рассматривать эмоциональный окрас текстов на уровне аспектов, под которыми понимается множество объектов текста, в отношении которых высказано определенное мнение или выражена эмоция.

Анализ тональности текстов предполагает извлечение аспектов на основании частотных характеристик слов и определение тональности:

- Поиск и выделение тональных слов и фраз;
- Поиск *sentiment shifters* (отрицательные частицы, местоимения: «не», «ни», «никто», «никогда» и т.д.);
- Анализ текста на наличие противопоставляющих союзов (союзы «но», «хотя», «однако»);

– Расчет коэффициента тональности для каждого аспекта на основе взаимной информации.

Для построения модели рекомендательной системы было предложено дополнить традиционное рассмотрение матриц «пользователь-продукт» двумя матрицами «пользователь-аспект» и «продукт-аспект», учитывающими анализ тональности текстов отзывов или рецензий.

Важным объектом при построении систем анализа и обработки текстов являются потоковые текстовые данные, поступающие с течением времени, на пример, из сети Интернет и содержащие множество фрагментов текстов. К потоковым данным могут быть отнесены статьи с новостных сайтов, сообщения и комментарии пользователей социальных сетей и блогов, электронная почта, данные из закрытых систем документооборота предприятий, пополняющиеся базы знаний.

Кластеризация потоковых текстовых данных была реализована с использованием модификации известного нейросетевого алгоритма самоорганизующихся карт Кохонена – GSOM (growingself-organizingmap, растущая самоорганизующаяся карта). Предварительная обработка текстов предполагает проведение процедуры стемминга, которая заключается в отсечении лишних терминов, представляющие собой лишь разнообразные грамматические формы слов на основе алгоритма стемминга Портера [10] для русского языка. А также процедура латентно-семантического индексирования (латентно-семантического анализа, ЛСА) для извлечения контекстно-зависимых значений лексических единиц при помощи статистической обработки больших корпусов текстов при кластеризации и классификации [8]. При этом рассматривались два варианта работы системы – четкой и нечеткой кластеризации текстов. Было показано, что при рассмотрении текстов различной тематической направленности алгоритм нечеткой кластеризации показал лучшие результаты. Оценка эффективности производилась среднему значению Dunn-индекса и индекса Davies-Bouldin [9] для всех полученных уровней иерархии. Значения индексов нескольких экспериментов для случаев нечеткой и четкой кластеризации приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения Dunn-индекса и индекса Davies-Bouldin для экспериментов четкой и нечеткой кластеризации

Номер эксперимента	Количество уровней иерархии	Четкая кластеризация		Нечеткая кластеризация	
		Dunn	Davies-Bouldin	Dunn	Davies-Bouldin
1	6	0,521	0,483	0,627	0,391
2	4	0,613	0,405	0,635	0,382
3	3	0,626	0,382	0,698	0,369
4	4	0,608	0,41	0,653	0,378

Задача идентификации автора текста рассматривается в разных областях знаний уже достаточно долгое время. Однако в последние годы особый интерес представляет задача определения авторства исходных кодов программ. Подобные задачи возникают при возникновении различных споров при установлении авторства и соблюдении прав интеллектуальной собственности, а также при создании систем информационной безопасности (кибербезопасности) при установлении авторства вредоносных программ [7].

При рассмотрении задачи идентификации автора исходных кодов был предложен подход построения классификатора на основе многослойного перцептрона, использующего в качестве модели представления текстов вычисление статистически значимых N-грамм, причем в этом случае алгоритм моделирования не зависит от языка программирования. Построенный классификатор показывает незначительное снижение точности идентификации при увеличении числа авторов. Кроме этого, был проведен эксперимент по определению устойчивости построенной системы к модификации исходного кода, в рамках которого была выявлена необходимость предварительного удаления комментариев в процессе построения модели исходного кода с целью повышения общей эффективности работы системы.

Также в качестве параметров модели текста использовать было предложено энтропийные характеристики символьного разнообразия [3]. Проведенный анализ показал, что кумулятивная характеристика символьного разнообразия текста может рассматриваться как информативный признак авторского стиля при идентификации авторства текста программы, а пиковая характеристика, как правило, неинформативна и зависит от свойств текста, не связанных непосредственно с авторством. Таким образом, кумулятивная характеристика символьного разнообразия может быть использована в системах идентификации авторства текстов, в том числе исходных кодов программ, в качестве одного из анализируемых параметров.

Рассмотренные примеры не ограничивают сферы применения предложенной методики. К проблемам, решаемым в рамках создания информационно-поисковых систем, можно отнести такие задачи как фильтрация и рубрикация документов, автоматическое аннотирование и сегментирование текстов и др. Для успешного решения подобных задач необходимо предусмотреть использование лингвистических и онтологических знаний. Еще одним направлением развития может служить рассмотрение таких текстовых данных, как тексты патентной документации и заявочных материалов, текстовые данные, создаваемые при использовании различными базами знаний и системами документооборота в организациях и на предприятиях.

Библиографический список

1. Ломакина Л.С., Суркова А.С. Теоретические аспекты концептуального анализа и моделирования текстовых структур // *Фундаментальные исследования*. 2015. № 2 (часть 17), с. 3713-3717.
2. Ломакина Л.С., Суркова А.С. Методологические аспекты концептуального анализа и моделирования текстовых структур // *Фундаментальные исследования*. 2015. № 6 (часть 3), с. 3713-3717.
3. Семенцов М.С., Суркова А.С. Энтропийные характеристики символического разнообразия в текстах исходных кодов программ // *Системы управления и информационные технологии*, №1.1(59), 2015. – С. 173-176.
4. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели – М.: Радио и связь, 1982. – 152 с.
5. Cilibrasi R., Vitanyi P.M.B. Clustering by compression // *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2005. Vol. 51, no. 4, 1523–1545.
6. D’Urso P. Fuzzy Clustering of Fuzzy Data // *Advances in Fuzzy Clustering and its Applications* (eds. J. V. de Oliveira, W. Pedrycz). 2007. – pp. 155-192.
7. Kontostathis A., Edwards L., Leatherman A. Text mining and cybercrime // *Text Mining. Applications and Theory*. Ed. by Berry M. W., Kogan J. – Wiley, 2010. P.149-164.
8. Landauer Th., Foltz P.W., Laham D. An Introduction to Latent Semantic Analysis // *Discourse Processes*. 1998. *Discourse Processes*, 25, pp.259-284.
9. Vinh N.X., Epps J., Bailey J. Information Theoretic Measures for Clusterings Comparison: Variants, Properties, Normalization and Correction for Chance // *The Journal of Machine Learning Research*. 2010, Vol. 11, pp. 2837-2854.
10. Willett P. The Porter stemming algorithm: then and now // *Program: Electronic Library and Information Systems*. 2006. vol.3 (40). pp. 219–223.

~ Lomakina L.S., Surkova A.S.

~ **Analysis and modeling in applied problems of text processing**

~ **Abstract.** The article describes some approaches to the procedures of the texts modeling and analysis, which used in the effective functioning of information-retrieval and information-analytical systems and systems of information security. There are examples of the practical implementation for the methods of streaming text classification, sentiment analysis of reviews and the programs source code authorship.

~ **Keywords:** texts analysis and processing, texts models, streaming text data, author identification

УДК 616.899

И.Я. Львович*, А.П.Преображенский **, О.Н.Чопоров***

* - Панъевропейский университет, Братислава, Словакия.

** - АНОО ВПО Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия

*** - ФГБОУ ВПО Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ “МУРАВЬИНОГО” АЛГОРИТМА ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ, ИМЕЮЩИХ МАКСИМАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ

Аннотация. В работе показана возможность построения моделей объектов, которые имеют максимальные средние значения характеристик рассеяния при определенных секторах углов наблюдения. С использованием разработанного алгоритма осуществлен расчет зависимостей характерных размеров полой структуры с максимальными средними значениями характеристик рассеяния.

Ключевые слова: полая структура, оптимизация, характеристики рассеяния.

Введение. Проведение процессов моделирования рассеяния электромагнитных волн на различных объектах, имеющих сложную форму имеет большое значение в связи с необходимостью решения задач радиолокационного распознавания, решения задач электромагнитной совместимости и т.д. [1-3].

На настоящий момент известно большое число моделей, на основе которых, в том числе и с привлечением аналитических формул можно проводить оценки характеристик рассеяния различных объектов [4,5].

Для определенных условий необходимо иметь информацию не об угловых зависимостях характеристик рассеяния, а об их средних значениях в заданных секторах углов наблюдения [6]. В различных литературных источниках можно найти данные по средним значениям ЭПР (эффективной площади рассеяния) по объектам простой формы (диск, пластина и др.) [5, 6]. Но для общего случая при расчете характеристик рассеяния необходимо использовать численные методы [3].

Представляет интерес провести разработку достаточно простой модели расчета размеров объекта, имеющего максимальные средние значения характеристик рассеяния для определенного сектора углов наблюдения.

Модель. Мы будем использовать следующую модель расчета. Выделяем на объекте определенную его часть. Пусть общая длина контура на этой части (в трехмерном случае мы рассматриваем площадь поверхности) равна L_a . Выделяем для этого контура участок, который имеет с характерный размер a .

Указанный подход можно применять, например, для объектов, имеющих симметрию [7] или для случая, когда анализируемый сектор углов наблюдения находится вблизи к нормали к рассматриваемым участкам.

Построение модели расчета размеров объекта, имеющего максимальные средние значения характеристик рассеяния мы проведем для полой структуры. В состав современных объектов техники входит большое число полых структур, причем мощность вторичного излучения таких элементов может быть весьма значительной [1,8].

Мы будем рассматривать двумерную модель. Из литературных источников известно, что двумерную модель полой структуры можно применять при оценке характеристик рассеяния полых структур, имеющих прямоугольное поперечное сечение [9, 10].

Пусть размер апертуры полой структуры b , длина L (рис.1). Нагрузка полой структуры имеет форму, изображенную на рисунке, на ней можно выделить характерный размер b тогда общая величина контура нагрузки $L_a = b / (\cos \varphi) + 2L$. В качестве характерного параметра выберем размер апертуры b . Требуется найти b и L_a , для которых средняя ЭПР в определенных секторах углов $\Delta\theta$ имеет максимальные значения. При решении задачи угол θ отсчитываем от нормали к апертуре полой структуры.

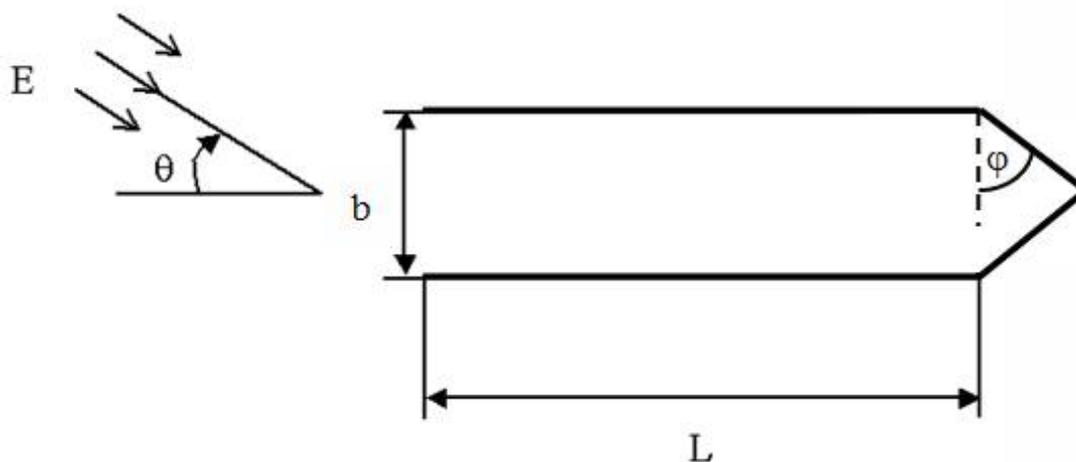


Рис.1 Схема рассеяния электромагнитных волн на полой структуре с размером апертуры a и длиной L , нагрузка имеет наклон под углом φ .

При анализе характеристик рассеяния сектор углов наблюдения изменялся в достаточно больших пределах: $5^\circ \leq \Delta\theta \leq 90^\circ$, мы рассматривали область передней полусферы. Характеристики рассеяния рассчитывались на основе метода интегральных уравнений [11].

Для уравнения Фредгольма первого рода, содержащее плотность неизвестного электрического тока при Е-поляризации [11], можно записать следующее выражение:

$$\frac{\omega \cdot \mu}{4} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} j(t) \cdot H_0^2 [k \cdot L_0(\tau, t)] \cdot \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt = E_z^0(\tau),$$

$$\alpha \leq \tau \leq \beta, \quad (1)$$

где $L_0(\tau, t) = \sqrt{[\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + [\eta(\tau) - \eta(t)]^2}$ – представляет собой расстояние между точкой наблюдения и точкой интегрирования, $E_z^0(\tau)$ – обозначает продольную составляющую напряженности первичного электрического поля для точки, находящейся на контуре. Контур задан в параметрической форме: $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, а $\xi'(t)$, $\eta'(t)$ – представляют собой первые производные соответствующих функций, $k = 2 \cdot \pi / \lambda$, λ – длина падающей электромагнитной волны.

Уравнение (1) решается на основе метода моментов мы находим продольные электрические токи, имеющие плотность

$$\vec{j} = \vec{z} \cdot j(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (2)$$

Двумерную ЭПР полой структуры можно найти исходя из следующего выражения

$$\sigma(\varphi) = (60 \cdot \pi)^2 \cdot k \cdot |D(\varphi)|^2, \quad (3)$$

$$\text{где } D(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} j(t) \cdot \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} \cdot \exp(i \cdot k \cdot d(t, \varphi)) dt,$$

$$d(t, \varphi) = \xi(t) \cdot \cos(\varphi) + \eta(t) \cdot \sin(\varphi).$$

Среднюю ЭПР мы вычисляем, основываясь на следующем выражении

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=0}^N \frac{\sigma(\theta_i)}{N+1}, \quad (4)$$

где $\sigma(\theta_i)$ – величина ЭПР для угла наблюдения θ_i .

Задачу определения b и L_a , которые дают максимальную среднюю ЭПР в заданных секторах углов наблюдения, мы решали следующим образом. Задается значение сектора углов наблюдения $\Delta\theta$. Для разных значений L_a определяются значения апертуры b . Функция $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(b, L_a)$ является многоэкстремальной, в этой связи при проведении расчетов L_a мы применяли метод сеток [12] с последовательным сужением области определяемых значений. По каждому участку сетки мы применяли муравьиный алгоритм [13, 14].

В нем используется правило перехода:

Муравей, который находится в точке r , будет делать выбор следующей точки s , основываясь на следующих уравнениях:

$$s = \begin{cases} \arg \max_{u \in J_k(r)} \{[\tau(r, u)] \cdot [\eta(r, u)]^\beta\}, & q < q_0 \\ \text{выбор согласно следующему} & , \\ \text{уравнению,} & \text{иначе} \end{cases} \quad (5)$$

здесь $J_k(r)$ представляет собой то множество ячеек в сетке которые требуется, чтобы муравей k посетил, он расположен в точке сетки r , $\tau(r, s)$ представляет собой меру феромона, $\eta(r, u) = 1/\delta(r, u)$, причем вес $\delta(r, u)$ выбирается в виде расстояния между точками, q мы обозначаем случайную величину, q_0 - это параметр ($0 \leq q \leq 1, 0 \leq q_0 \leq 1$).

В том случае, когда $q \geq q_0$, муравей будет проводить выбор следующей точки в соответствии со следующим уравнением:

$$p_k(r, s) = \begin{cases} \frac{[\tau(r, s)] \cdot [\eta(r, s)]^\beta}{\sum_{u \in J_k(r)} [\tau(r, u)] \cdot [\eta(r, u)]^\beta}, & \text{если } s \in J_k(r) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (6)$$

здесь $p_k(r, s)$ обозначена вероятность того, что точка s будет выбрана муравьем k , который расположен в точке r .

Используется правило локального обновления:

$$\tau(r, s) \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \rho \cdot \Delta\tau(r, s), \quad (7)$$

где ρ - локальный параметр, $0 > \rho > 1$, $\Delta\tau(r, s)$ представляет собой сумму феромона, который оставлен муравьями.

Есть соответствие глобального правила обновления и следующего уравнения:

$$\tau(r, s) \leftarrow (1 - \alpha) \cdot \tau(r, s) + \alpha \cdot \Delta\tau(r, s), \quad (8)$$

где α - глобальный параметр, $0 > \alpha > 1$, $\Delta\tau(r, s) = 1/\text{лучшая глобальная длина}$, в том случае, если есть принадлежность отрезка (r, s) этой длине.

Рассмотренный подход может быть реализован в соответствующей информационной системе. В нее будут входить следующие основные компоненты: база данных, содержащая информацию о размерах объектов и секторах углов наблюдения, модуль оптимизации, позволяющий проводить оптимизацию характеристик, модуль расчета, в котором происходит расчет характеристик рассеяния объектов, модуль визуализации, позволяющий выводить угловые зависимости характеристик рассеяния и зависимости между размерами объектов при заданных уровнях на средние характеристики рассеяния..

Результаты. На рис. 2 приведены зависимости длины контура L_a от значения апертуры b полой структуры, при которых может быть достигнута максимальная средняя ЭПР $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(b, L_a)$.

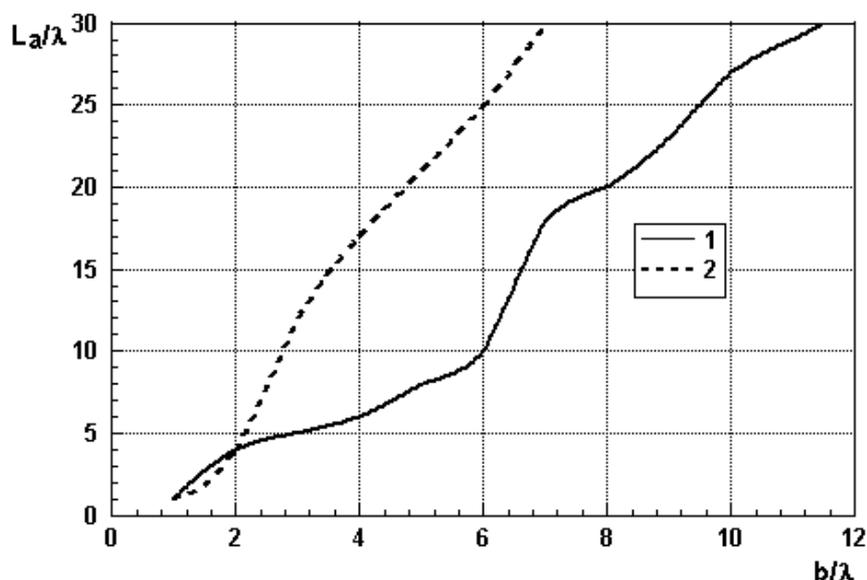


Рис.2 Зависимость длины контура полой структуры (Рис.1) L_a от значения размеров апертуры b при максимальном значении средней ЭПР в секторе углов $\Delta\theta=5^\circ$ (кривая 1), $\Delta\theta=15^\circ$ (кривая 2) при значении угла $\varphi=20^\circ$.

Вывод. На основе рассмотренной модели в работе показана возможность определения характерных размеров объекта, имеющего максимальные средние значения характеристик рассеяния на примере полой структуры. На основе полученных результатов можно проводить проектирование объектов, имеющих низкий уровень вторичного электромагнитного излучения.

Библиографический список

1. Стайнберг Б.Д., Карлсон Д.Л., Ву Сэн Ли. Экспериментальное определение ЭПО отдельных отражающих частей самолета. - ТИИЭР, 1989, № 5, с. 35-42.
2. Численные методы теории дифракции: Сб. статей. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 200 с.
3. Вычислительные методы в электродинамике. Под ред. Митры Р. – М.: Мир, 1977 – 485 с.
4. Кобак В.О. Радиолокационные отражатели. – М.: Сов.радио, 1975. – 248 с.
5. Ширман Я.Д., Горшков С.А., Лещенко С.П., Братченко Г.Д., Орленко В.М. Методы радиолокационного распознавания и их моделирование // Зарубежная радиоэлектроника, №11, 1996, стр. 3-63.
6. Штагер Е.А., Чаевский Е.Н. Рассеяние волн на телах сложной формы. – М.: Сов. радио, 1974. – 240 с.
7. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. – М.: Радио и связь, 1987. – 272 с.
8. Преображенский А.П. Моделирование и алгоритмизация анализа дифракционных структур в САПР радиолокационных антенн / Воронеж, Научная книга, 2007, 248 с

9. Преображенский А.П. Оценка возможностей комбинированной методики для расчета ЭПР двумерных идеально проводящих полостей // Телекоммуникации, 2003, №11, с.37-40.
10. Ling H. RCS of waveguide cavities: a hybrid boundary-integral/modal approach. // IEEE Trans. Antennas Propagat., 1990, vol. AP-38, no. 9, pp. 1413–1420.
11. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. – М.: Наука, 1986. – 184 с.
12. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
13. Hozefa M. Botee, Bonabeau E. Evolving ant colony optimization Adv. Complex Systems no.1, 1998, pp.149-159.
14. Dorigo M., Maniezo V. and Colomi A. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, no.1, pp.29-41.

~ I.Ya.Lvovich, A.P.Preobrazhensky, O.N.Choporov

The use of “ant” algorithm for construction of models of objects with maximum average values of scattering characteristics

Abstract: The paper shows the possibility of constructing models of objects that have a maximum average values of the characteristics of scattering at a certain sector of angles. Using the developed algorithm calculates the dependencies of the characteristic dimensions of a hollow structure with a maximum average values of the characteristics of scattering.

Keywords: hollow structure, optimization, characteristics of scattering.

УДК 517.4+519.71

Ю.В. Мартынова

ООО «РН-УфаниПИнефть», Уфа, Россия

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ ТИПА «ДЕРЕВО»

Аннотация. Исследуются прямая и обратная спектральные задачи для оператора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе типа «дерево». Обратная спектральная задача сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора в конечномерном евклидовом пространстве. Предложена идея численного решения.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, обратная спектральная задача, геометрический граф.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается модельная задача об определении условий заземления на концах электрической сети в виде произвольного геометрического графа типа «дерево» (без циклов).

На каждом из P линейных фрагментов сети, представляющих собой ребра геометрического графа, задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k с распределенными емкостью и индуктивностью

$$(U_k)_{tt}(x_k; t) = a_k^2 (U_k)_{x_k x_k}(x_k; t), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, P}, \quad (1)$$

где $a_k^2 = \frac{1}{L_k C_k}$, C_k и L_k – коэффициенты емкости и индуктивности, рассчитанные на единицу длины провода соответствующего k -го проводника.

Пронумеруем концевые узлы графа и соответствующие им ребра от 1 до N . Тогда граничные условия описывают ситуацию, когда k -ый проводник заземлен через сосредоточенную самоиндукцию \tilde{L}_k и емкость \tilde{C}_k , соединенные последовательно,

$$(U_k)_{x_k}(l_k; t) + C_k \tilde{L}_k (U_k)_{tt}(l_k; t) + \frac{C_k}{\tilde{C}_k} U_k(l_k; t) = 0, k = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Конечный связный граф является деревом с P вершинами тогда и только тогда, когда число вершин (узлов) равно $P+1$. Поэтому пронумеруем оставшиеся узлы ветвления от $N+1$ до $P+1$, причем таким образом, чтобы между i -ым и $(i+1)$ -ым узлом ветвления существовало ровно одно ребро – проводник с напряжением U_i , $i = \overline{N+1, P}$.

В каждом из $M = P+1 - N$ узлов задаются условия непрерывности потенциала и условия баланса токов, известные как законы Кирхгофа.

Для $(N+1)$ -го узла, соединенного с D_1 концевыми узлами, имеем:

$$\begin{cases} U_1(0; t) = \dots = U_{D_1}(0; t) = U_{N+1}(0; t); \\ \sum_{i=1}^{D_1} (U_i)_{x_i}(0; t) + (U_{N+1})_{x_{N+1}}(0; t) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для $(N+j)$ -го узла, соединенного с D_j концевыми узлами, $j = \overline{2, M-1}$, имеем:

$$\begin{cases} U_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0; t) = \dots = U_{D_1+\dots+D_j}(0; t) = U_{N+j-1}(l_{N+j-1}; t) = U_{N+j}(0; t); \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} (U_i)_{x_i}(0; t) - (U_{N+j-1})_{x_{N+j-1}}(l_{N+j-1}; t) + (U_{N+j})_{x_{N+j}}(0; t) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для $(N+M)$ -го узла, соединенного с D_M концевыми узлами, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0;t) = \dots = U_{D_1+\dots+D_M}(0;t) = U_P(l_P;t); \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} (U_i)_{x_i}(0;t) - (U_P)_{x_P}(l_P;t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Согласно выбранным обозначениям количество концевых узлов исследуемого графа равно $N = D_1 + \dots + D_M$, тогда получим $D_1 + (D_2 + 1) + \dots + (D_{M-1} + 1) + D_M = D_1 + \dots + D_M + M - 2 = N + M - 2 = P - 1$ условий непрерывности потенциала и M условий баланса токов. Таким образом, получаем систему из P дифференциальных уравнений (1) с N граничными условиями (2) и $P - 1 + M$ условиями в узлах ветвления (3.1)-(3.3), значит, всего имеем $N + P - 1 + M = 2P$ условий.

Теперь от начально-краевой задачи (1)-(3) перейдем к задаче на собственные значения.

Будем искать собственные колебания соответствующей динамической системы в виде $U_k(x_k, t) = e^{i\omega t} y_k(x_k)$, $k = \overline{1, P}$.

$$\text{Введем обозначения} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \omega^2 > 0, \\ p_{i1} = \frac{C_i}{\tilde{C}_i} > 0, i = \overline{1, N}, \\ p_{i2} = -C_i \tilde{L}_i \frac{\omega^2}{\lambda} = -C_i \tilde{L}_i < 0, i = \overline{1, N}. \end{array} \right.$$

Тогда получаем краевую задачу:

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k) = 0, \quad x_k \in (0; l_k), \quad k = \overline{1, P}; \quad (4)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}; \quad (5)$$

и условиями в узлах ветвления:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = \dots = y_{D_1}(0) = y_{N+1}(0), \\ y_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_j}(0) = y_{N+j-1}(l_{N+j-1}) = y_{N+j}(0), j = \overline{2, M-1}, \\ y_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_M}(0) = y_P(l_P); \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{D_1} y_i'(0) + y'_{N+1}(0) = 0, \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} y_i'(0) - y'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) + y'_{N+j}(0) = 0, j = \overline{2, M-1}, \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} y_i'(0) - y'_P(l_P) = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты $p_{i1}, p_{i2}, i = \overline{1, N}$, должны быть вещественными, более того, $p_{i1} > 0$ и $p_{i2} < 0, i = \overline{1, N}$.

Суть прямой спектральной задачи для краевой задачи (4)-(7) состоит в нахождении собственных значений.

Обратная спектральная задача состоит в нахождении всевозможных значений вектора $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$ коэффициентов граничных условий (5), при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ являются собственными значениями краевой задачи (4)-(7).

2. ПОСТАНОВКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА В КОНЕЧНОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Обозначим через $u_k(x_k; \lambda)$ и $v_k(x_k; \lambda), k = \overline{1, P}$ линейно-независимые решения соответствующего k -го уравнения из (4). Тогда любое решение k -го уравнения можно записать в виде

$$y_k(x_k; \lambda) = C_1^k(\lambda; \vec{p})u_k(x_k; \lambda) + C_2^k(\lambda; \vec{p})v_k(x_k; \lambda), k = \overline{1, P}. \quad (9)$$

Для сокращения записи далее будем рассматривать $y_k(x_k) = C_1^k u_k(x_k) + C_2^k v_k(x_k)$.

Подставим фундаментальную систему решений (9) в условия (5)-(7), получим систему из $2P$ уравнений:

$$C_1^k u'_k(l_k) + C_2^k v'_k(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2})(C_1^k u_k(l_k) + C_2^k v_k(l_k)) = 0; k = \overline{1, N};$$

$$C_1^i u_i(0) + C_2^i v_i(0) - C_1^i u_i(0) - C_2^i v_i(0) = 0; i = \overline{2, D_1};$$

$$C_1^1 u_1(0) + C_2^1 v_1(0) - C_1^{N+1} u_{N+1}(0) - C_2^{N+1} v_{N+1}(0) = 0;$$

$$C_1^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} u_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) + C_2^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} v_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) - C_1^i u_i(0) - C_2^i v_i(0) = 0;$$

$$i = \overline{D_1 + \dots + D_{j-1} + 2, D_1 + \dots + D_j}; j = \overline{2, M};$$

$$C_1^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} u_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) + C_2^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} v_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) - C_1^{N+j} u_{N+j}(0) - C_2^{N+j} v_{N+j}(0) = 0;$$

$$j = \overline{2, M-1};$$

$$C_1^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} u_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) + C_2^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} v_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) - C_1^{N+j-1} u_{N+j-1}(l_{N+j-1}) -$$

$$- C_2^{N+j-1} v_{N+j-1}(l_{N+j-1}) = 0; j = \overline{2, M};$$

$$\sum_{i=1}^{D_1} (C_1^i u'_i(0) + C_2^i v'_i(0)) + C_1^{N+1} u'_{N+1}(0) + C_2^{N+1} v'_{N+1}(0) = 0;$$

$$\sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} (C_1^i u'_i(0) + C_2^i v'_i(0)) + C_1^{N+j} u'_{N+j}(0) + C_2^{N+j} v'_{N+j}(0) - C_1^{N+j-1} u'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) -$$

$$- C_2^{N+j-1} v'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) = 0; j = \overline{2, M-1};$$

$$\sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} (C_1^i u_i'(0) + C_2^i v_i'(0)) - C_1^P u_P'(l_P) - C_2^P v_P'(l_P) = 0.$$

Эту систему уравнений можно представить в виде векторно-матричного уравнения

$$B(\lambda, \vec{p}) \vec{C} = [B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N (p_{k1} B_{k1}(\lambda) + p_{k2} B_{k2}(\lambda))] \vec{C} = 0, \quad (10)$$

где $\vec{C} = (C_1^1(\lambda, \vec{p}); C_2^1(\lambda, \vec{p}); \dots; C_1^P(\lambda, \vec{p}); C_2^P(\lambda, \vec{p}))$ – вектор размерности $2P$,

$$(B_{k1})_{ij}(\lambda) = \begin{cases} u_k(l_k), i = k, j = 2k - 1; \\ v_k(l_k), i = k, j = 2k; \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$B_{k2}(\lambda) = \lambda B_{k1}(\lambda); \quad k = \overline{1, P}.$$

Выпишем блочный вид матрицы $(B_0)_{ij}(\lambda)$:

- для строк с номерами от 1 до N :

$$\begin{cases} u_i'(l_i), i = \overline{1, N}, j = 2i - 1; \\ v_i'(l_i), i = \overline{1, N}, j = 2i; \end{cases}$$

- для строк с номерами от $N+1$ до $N+D_1$:

$$\begin{cases} u_1(0), i = \overline{N+1, N+D_1}, j = 1; \\ v_1(0), i = \overline{N+1, N+D_1}, j = 2; \\ -u_k(0), k = \overline{2, D_1}, i = N-1+k, j = 2k-1; \\ -v_k(0), k = \overline{2, D_1}, i = N-1+k, j = 2k; \\ -u_{N+1}(0), i = N+D_1, j = 2(N+1)-1; \\ -v_{N+1}(0), i = N+D_1, j = 2(N+1); \end{cases}$$

- для строк с номерами от $N+D_1+1$ до $N+D_1+\dots+D_{M-1}+M-2$ при $m = \overline{2, M-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u_{D_1+\dots+D_{m-1}+1}(0), i = N + D_1 + \dots + D_{m-1} + m - 1, N + D_1 + \dots + D_m + m - 1,} \\ \overline{j = 2(D_1 + \dots + D_{m-1} + 1) - 1;} \\ \overline{v_{D_1+\dots+D_{m-1}+1}(0), i = N + D_1 + \dots + D_{m-1} + m - 1, N + D_1 + \dots + D_m + m - 1,} \\ \overline{j = 2(D_1 + \dots + D_{m-1} + 1);} \\ -u_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{m-1} + 2, D_1 + \dots + D_m}, i = N + k + m - 3, j = 2k - 1; \\ -v_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{m-1} + 2, D_1 + \dots + D_m}, i = N + k + m - 3, j = 2k; \\ -u_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 2, j = 2(N + m - 1) - 1; \\ -v_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 2, j = 2(N + m - 1); \\ -u_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 1, j = 2(N + m) - 1; \\ -v_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 1, j = 2(N + m); \end{array} \right.$$

- для строк с номерами от $N+D_1+\dots+D_{M-1} + M - 1$ до $N+D_1+\dots+D_M + M$

- 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 1, N + D_1 + \dots + D_M + M - 2,} \\ \overline{j = 2(D_1 + \dots + D_{M-1} + 1) - 1;} \\ \overline{v_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 1, N + D_1 + \dots + D_M + M - 2,} \\ \overline{j = 2(D_1 + \dots + D_{M-1} + 1);} \\ -u_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{M-1} + 2, D_1 + \dots + D_M}, i = N + k + M - 3, j = 2k - 1; \\ -v_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{M-1} + 2, D_1 + \dots + D_M}, i = N + k + M - 3, j = 2k; \\ -u_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 2, j = 2(N + M - 1) - 1; \\ -v_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 2, j = 2(N + M - 1); \end{array} \right.$$

- для строки с номером $N+D_1+\dots+D_M+M-1=2N+M-1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u'_k(0), k = 1, D_1}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, j = 2k - 1; \\ \overline{v'_k(0), k = 1, D_1}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, j = 2k; \\ \overline{u'_{N+1}(0), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, j = 2(N + 1) - 1;} \\ \overline{v'_{N+1}(0), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, j = 2(N + 1);} \end{array} \right.$$

- для строк с номерами от $2N + M$ до $2N + 2M - 3 = 2P - 1$ при $m = 2, M - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{m-1}, N + D_1 + \dots + D_m}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, j = 2k - 1; \\ v'_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{m-1}, N + D_1 + \dots + D_m}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, j = 2k; \\ -u'_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 2 + m, j = 2(N + m - 1) - 1; \\ -v'_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 2 + m, j = 2(N + m - 1); \\ u'_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 2 + m, j = 2(N + m) - 1; \\ v'_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 2 + m, j = 2(N + m); \end{array} \right. -$$

для строки с номером $2P$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{M-1}, D_1 + \dots + D_M}, i = 2P, j = 2k - 1; \\ v'_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{M-1}, D_1 + \dots + D_M}, i = 2P, j = 2k; \\ -u'_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = 2P, j = 2(N + M - 1) - 1 = 2P - 1; \\ -v'_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = 2P, j = 2(N + M - 1) = 2P; \end{array} \right.$$

- остальные элементы рассматриваемой матрицы равны 0.

Суть прямой спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \vec{p})$, определенного в (10) состоит в нахождении собственных значений, её решение сводится к решению нелинейного уравнения относительно λ

$$\det[B(\lambda, \vec{p})] = 0. \quad (11)$$

Сформулируем многопараметрическую обратную спектральную задачу для оператора $B(\lambda, \vec{p})$, определенного в (10).

Требуется найти возможные значения вектора $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$ коэффициентов граничных условий (5), при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ являются собственными значениями оператора $B(\lambda, \vec{p})$.

Решение обратной спектральной задачи сводится к решению системы уравнений

$$B(\lambda_j, \vec{p})\vec{C}(\lambda_j, \vec{p}) = 0, \quad j = \overline{1, 2N}, \quad (12)$$

которая в свою очередь эквивалентна системе

$$\det[B(\lambda_j, \vec{p})] = 0, \quad j = \overline{1, 2N}. \quad (13)$$

3. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В данном пункте изложим одну общую идею численного построения всех решений многопараметрической обратной спектральной задачи в конечномерном евклидовом пространстве E^n . Этот метод основан на монотонной зависимости собственных значений от параметров задачи, доказанной в статье автора [1] и является аналогом метода деления отрезка пополам.

Введем конус векторов $K = \{\vec{x} \in R^m : x_k \geq 0 \text{ или } x_k \leq 0\}$ и конусный отрезок $[\vec{a}, \vec{b}]_K = \{\vec{x} \in R^m : a_k \leq x_k \leq b_k\}$.

Обозначим через $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_m(\vec{p})$ собственные значения оператора $B(\lambda, \vec{p})$ при некотором значении вектора $\vec{p} \in R^m$.

Многопараметрическая обратная спектральная задача для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ состоит в нахождении такого значения вектора $\vec{p} \in R^m$ из заданного конусного отрезка $[\vec{a}, \vec{b}]_K$, чтобы $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_m(\vec{p})$ были соответственно равны наперед заданным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – спектральным данным задачи.

Рассматриваемая функция $\vec{\mu}(\vec{p}) = (\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_m(\vec{p}))$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\vec{\mu} : K \rightarrow K, \vec{\mu}(\vec{p}) \in C^1(K)$;
- 2) $\vec{\mu}(\vec{p})$ – монотонная, т.е. $\frac{\partial \mu_j(\vec{p})}{\partial p_k} \neq 0, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$.

Областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in R^m$ будем называть область, в которой нет вектора $\vec{p} \in R^m$ такого, что $\vec{\mu}(\vec{p}) = \vec{\lambda}$.

Сформулируем достаточные условия для области несуществования решений МПОСЗ.

Теорема 1. Если $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_K$, тогда конусный отрезок $[\vec{a}, \vec{b}]_K$ является областью несуществования для многопараметрической обратной спектральной задачи со спектральными данными $\vec{\lambda} \in R^m$.

Действительно, если $\vec{p} \in [a, b]_K$, то в силу монотонности $\vec{\mu}(\vec{p}) \in [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_K$. Поскольку $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_K$, то по определению отрезок $[\vec{a}, \vec{b}]_K$ является областью несуществования для многопараметрической обратной спектральной задачи.

Кусочно-гладкую кривую \vec{l} будем называть монотонной кривой, если $\frac{\partial \vec{l}(t)}{\partial t} \in K$.

Определим конусный отрезок $[\vec{a}, \vec{b}]_K$, в котором будем искать решения многопараметрической обратной спектральной задачи. Рассмотрим точку $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]_K$, которая будет являться центром конусного отрезка и лежать на монотонной кривой, соединяющей точки \vec{a} и \vec{b} . Три точки (вершины \vec{a} , \vec{b} и центр \vec{c}) образовали два конусных отрезка $[\vec{a}, \vec{c}]_K$ и $[\vec{c}, \vec{b}]_K$, которые

являются подобластями конусного отрезка $[\vec{a}, \vec{b}]_K$. Поскольку у m -мерного конусного отрезка 2^m вершин, то можно сформировать 2^m подобластей $[\vec{a}, \vec{b}]_K^{(i)}$, $i = \overline{1, 2^m}$, таких, что $\bigcap_{i=1}^{2^m} [\vec{a}, \vec{b}]_K^{(i)} = \vec{c}$ и $\bigcup_{i=1}^{2^m} [\vec{a}, \vec{b}]_K^{(i)} = [\vec{a}, \vec{b}]_K$. Далее в каждом конусном отрезке $[\vec{a}, \vec{b}]_K^{(i)}$, $i = \overline{1, 2^m}$ проверим выполнения условия теоремы 1. Если условие выполняется, то рассматриваемый конусный отрезок не содержит решений, если же условие выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему конусному отрезку. Продолжив данную процедуру конечное число раз, получим локализацию областей существования решения с любой необходимой точностью. Применяя итерационный метод для каждой локализованной области существования, можно уточнить решения поставленной задачи до требуемой точности.

Данный численный алгоритм реализован в пакете MATLAB для конкретных примеров задачи.

Библиографический список

1. Мартынова Ю.В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе типа «дерево» // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – №3(53). С. 19-23.
2. Валеев Н.Ф., Рабцевич С.А., Нугуманов Э.Р. О задаче идентификации граничных условий оператора Штурма-Лиувилля по спектру // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – №3(37). С. 9-12.
3. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады РАН. – 2009. – Том 426. – №4. С. 1-4.
4. Покорный Ю.В., Пенкин О.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. Москва: Физматлит, 2005. 272 стр.

≈ Martynova Y.V.

≈ **Solution of eigenvalue problems for the Sturm - Liouville operator on a graph of the tree type**

≈ **Abstract.** Investigate the direct and inverse spectral problems for the Sturm - Liouville operator on geometrical graph of the tree type. The inverse spectral problem is reduced to a multiparameter inverse spectral problem for the operator in a finite- dimensional Euclidean space. Describe a numerical solution of the inverse spectral problem.

УДК 517.9

Нгуен Тхи Хиен

Университет транспорта и комуникации, Ханой, Вьетнам

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА И ПРИМЕР ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Аннотация: В данной работе сформулирована и доказана обобщенная теорема о существовании и единственности предельного цикла. Рассматривается пример применения этой обобщенной теоремы.

Ключевые слова: обобщенная теорема, выпуклое замкнутое множество, замкнутая траектория, касательный и нормальный конусы.

1. Обобщенная теорема

В выпуклом замкнутом множестве $Q \subset R^2$ рассматривается следующая система

$$\dot{x} = \tau_x f(x), \quad (1)$$

где $\tau_x f(x)$ – проекция вектора $f(x)$ на $T_Q(x)$ – касательный конус к Q в точке x (см. [1]). Теперь обобщенная теорема формулируется следующим образом.

Пусть выполнены следующие условия:

$$f : Q \rightarrow R^2 \text{ – липшицева функция;} \quad (2)$$

$$Q \neq R^2 \text{ – выпуклое замкнутое множество;} \quad (3)$$

$$x^* \in \text{int} Q; \quad (4)$$

$$f(x) \notin N_Q(x) \text{ при } x \neq x^*, \quad (5)$$

где $N_Q(x)$ – нормальный конус к Q в точке x (см. [1]);

$$(B(x - x^*), f(x)) \geq \mu(\|x - x^*\|), \quad (6)$$

где B – некоторая симметрическая положительно определенная матрица,

μ – непрерывная функция, $\mu(a) > 0$ при $a > 0$;

$$|(f(x), C(x - x^*))| \geq \nu_0 \|x - x^*\|^2, \quad (7)$$

где $\nu_0 > 0$ и $Cx = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Тогда система (1) имеет единственную замкнутую проекцию, которая орбитально устойчива и в которую вливаются при $t \rightarrow +\infty$ траектории всех решений данной системы.

Доказательство. Сначала заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$N_Q(x) = N_{Q-x^*}(x - x^*) \quad (8)$$

и

$$T_Q(x) = T_{Q-x^*}(x - x^*). \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (8) вытекает из определения нормального конуса. Действительно,

$$\begin{aligned} y \in N_Q(x) &\Leftrightarrow \forall (\xi \in Q) [(y, \xi - x) \leq 0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall (\bar{\xi} = \xi - x^* \in Q - x^*) [(y, \bar{\xi} - (x - x^*)) = (y, \xi) \leq 0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in N_{Q-x^*}(x - x^*). \end{aligned}$$

Соотношение (9) непосредственно следует из (8).

Для доказательства этой обобщенной теоремы сделаем замену переменных. Положим

$$z := x - x^* \text{ и } F(z) := f(x + x^*) = f(x). \quad (10)$$

Отсюда вытекает, что если $x \in Q$, то $z \in Q - x^*$. С помощью (10) и (8) нетрудно проверить, что все условия теоремы о существовании и единственности предельного цикла (см. [2]) выполнены для функции $F(z)$, $z \in Q - x^*$ и, тем самым, доказана эта обобщенная теорема.

2. Пример применения обобщенной теоремы

2.1. Постановка задачи

Пусть множество $Q \subset R^2$ – выпуклый четырехугольник, вершинами которого являются следующие точки: $X_1 = \left(\frac{b}{k}, b\right)$; $X_2 = (0, 0)$; $X_3 = (-a, ka)$ и $X_4 = (-a, b)$, где $a, b, k > 0$ и $b > ak$. Определим следующие единичные векторы:

$$n_1 = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{k^2 + 1}} \end{pmatrix}; n_2 = \begin{pmatrix} \frac{-k}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{k^2 + 1}} \end{pmatrix}; n_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } n_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что множество Q можно представить в виде пересечения четырех полупространств Q_i ($i = \overline{1, 4}$), где полупространство Q_i является множеством векторов $x \in R^2$, удовлетворяющих неравенству

$(n_i, x - X_i) \leq 0$. На этом множестве Q рассматривается система (1), в которой $f(x) = A(x - x^*)$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\varepsilon \\ \varepsilon & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \varepsilon > 0;$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} \in \text{int } Q,$$

следовательно,

$$-a < x_1^* < \frac{b}{k} \text{ и } k|x_1^*| < x_2^* < b. \quad (11)$$

Вопрос заключается в том, при каком условии на положительное число ε все условия обобщенной теоремы для системы (1) будут выполнены.

2.2. Теорема о замкнутой траектории

Существует такое положительное число ε_0 , что для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ система (1) имеет единственную замкнутую траекторию, которая орбитально устойчива и в которую вливаются при $t \rightarrow +\infty$ траектории всех решений данной системы.

Доказательство. Заметим, что в силу определения множества Q и функции $f(x)$ безусловно будут выполнены условия (1) – (7). При этом, в условии (1) константой Липшица функции f является величина

$$L = \max \left\{ \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2}, \sqrt{\beta^2 + \varepsilon^2} \right\}. \quad (12)$$

Легко видеть, что независимо от ε условие (6) будет выполнено. Действительно, в (6) в качестве симметричной положительно определенной матрицы B возьмем единичную двумерную матрицу, тогда

$$(B(x - x^*), f(x)) = \left(\begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_1^*) - \varepsilon(x_2 - x_2^*) \\ \varepsilon(x_1 - x_1^*) + \beta(x_2 - x_2^*) \end{pmatrix} \right)$$

и, следовательно,

$$(B(x - x^*), f(x)) = \alpha(x_1 - x_1^*)^2 + \beta(x_2 - x_2^*)^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$(B(x - x^*), f(x)) \geq \min \{ \alpha, \beta \} \|x - x^*\|^2,$$

$$\text{где } \|x - x^*\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2}.$$

Теперь найдем ε так, чтобы было выполнено условие (7).

$$\begin{aligned} |(f(x), C(x - x^*))| &= \left| \left(\begin{pmatrix} a(x_1 - x_1^*) - \varepsilon(x_2 - x_2^*) \\ \varepsilon(x_1 - x_1^*) + \beta(x_2 - x_2^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(x_2 - x_2^*) \\ x_1 - x_1^* \end{pmatrix} \right) \right| = \\ &= \left| \varepsilon \|x - x^*\|^2 - (\beta - \alpha)(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \right|, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\left| (f(x), C(x - x^*)) \right| \geq \left(\varepsilon - \frac{|\beta - \alpha|}{2} \right) \cdot \|x - x^*\|^2.$$

Поэтому нетрудно видеть, что условие (7) выполнено, если

$$\varepsilon > \frac{|\beta - \alpha|}{2} =: \varepsilon_1. \quad (13)$$

Нам остается найти условие на ε для того, чтобы (5) было выполнено. Заметим, что если $x \in \text{int} Q$, то условие (5) безусловно выполнено. Пусть x лежит на границе этого множества. На стороне $X_1 X_2$, являющейся частью

прямой $d_1 : (n_1, x) = \frac{kx_1 - x_2}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0$, вычислим скалярное произведение

$(f(x), u_1)$, где $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ – направляющий вектор этой прямой

$$(f(x), u_1) = \left(\begin{pmatrix} a(x_1 - x_1^*) - \varepsilon(x_2 - x_2^*) \\ \varepsilon(x_1 - x_1^*) + \beta(x_2 - x_2^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \right).$$

Следовательно,

$$(f(x), u_1) = (\alpha + \beta k^2)x_1 + \varepsilon(x_2^* - kx_1^*) - (\alpha x_1^* + \beta kx_2^*).$$

Отсюда вытекает, что на прямой d_1 $(f(x), u_1) = 0$ только в одной точке, первая координата которой равна

$$x_1 = \frac{-\varepsilon(x_2^* - kx_1^*) + \alpha x_1^* + \beta kx_2^*}{\alpha + \beta k^2}.$$

Поэтому на $X_1 X_2$ условие (5) будет верно, если

$$\frac{-\varepsilon(x_2^* - kx_1^*) + \alpha x_1^* + \beta kx_2^*}{\alpha + \beta k^2} < 0;$$

из этого и неравенства (10) следует, что

$$\varepsilon > \frac{\alpha x_1^* + \beta kx_2^*}{x_2^* - kx_1^*} =: \varepsilon_2. \quad (14)$$

Аналогично, на сторонах $X_2 X_3$, $X_3 X_4$ и $X_4 X_1$, соответственно, вычислим скалярные произведения $(f(x), u_2)$, $(f(x), u_3)$ и $(f(x), u_4)$, где

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате вычисления получим, что

$$(f(x), u_2) = -(\alpha + \beta k^2)x_1 - \varepsilon(x_2^* + kx_1^*) + \alpha x_1^* - \beta kx_2^*;$$

$$(f(x), u_3) = \beta x_2 - \varepsilon(a + x_1^*) - \beta x_2^*;$$

$$(f(x), u_4) = \alpha x_1 - \varepsilon(b - x_2^*) - \alpha x_1^*.$$

Нетрудно видеть, что условие (5) будет выполнено на сторонах X_2X_3 , X_3X_4 и X_4X_1 , если, соответственно, верны следующие неравенства:

$$-\frac{\varepsilon(x_2^* + kx_1^*) - \alpha x_1^* + \beta kx_2^*}{\alpha + \beta k^2} < -a;$$

$$\frac{\varepsilon(a + x_1^*) + \beta x_2^*}{\beta} > b;$$

$$\frac{\varepsilon(b - x_2^*) + \alpha x_1^*}{\alpha} > \frac{b}{k}.$$

Отсюда и из неравенства (10) вытекает, что

$$\varepsilon > \frac{a(\alpha + \beta k^2) + \alpha x_1^* - \beta kx_2^*}{x_2^* + kx_1^*} =: \varepsilon_3; \quad (15)$$

$$\varepsilon > \frac{\beta(b - x_2^*)}{a + x_1^*} =: \varepsilon_4; \quad (16)$$

$$\varepsilon > \frac{\alpha(b - kx_1^*)}{k(b - x_2^*)} =: \varepsilon_5. \quad (17)$$

Из (13) – (17) следует, что если $\varepsilon_0 = \max_{i=1,5} \{\varepsilon_i\}$, то для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ все условия в обобщенной теореме будут выполнены и, тем самым, доказана теорема о замкнутой траектории.

2.3. Эксперименты численного анализа

Приведем результаты некоторых экспериментов численного анализа, проведенных с помощью программы Mathematica 7.0 и гладкой модели (см. [3]) для системы (1). Для этого возьмем $a = 0.5$, $b = 1.5$, $k = \sqrt{3}$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$ и $x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, после этого можно найти $\varepsilon_0 = 0.34641$ (см. доказательство теоремы о замкнутой траектории).

Если возьмем $\varepsilon = 0.35641 > \varepsilon_0$, то решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0) = x_0 \in Q \quad (18)$$

имеет замкнутую траекторию. На рисунке (Рис. 1) изображены траектории решений, удовлетворяющих разным начальным условиям. Из этого рисунка следует вывод: при $\varepsilon > \varepsilon_0$ все траектории втекают в одну единственную замкнутую траекторию, лежащую в множестве Q .

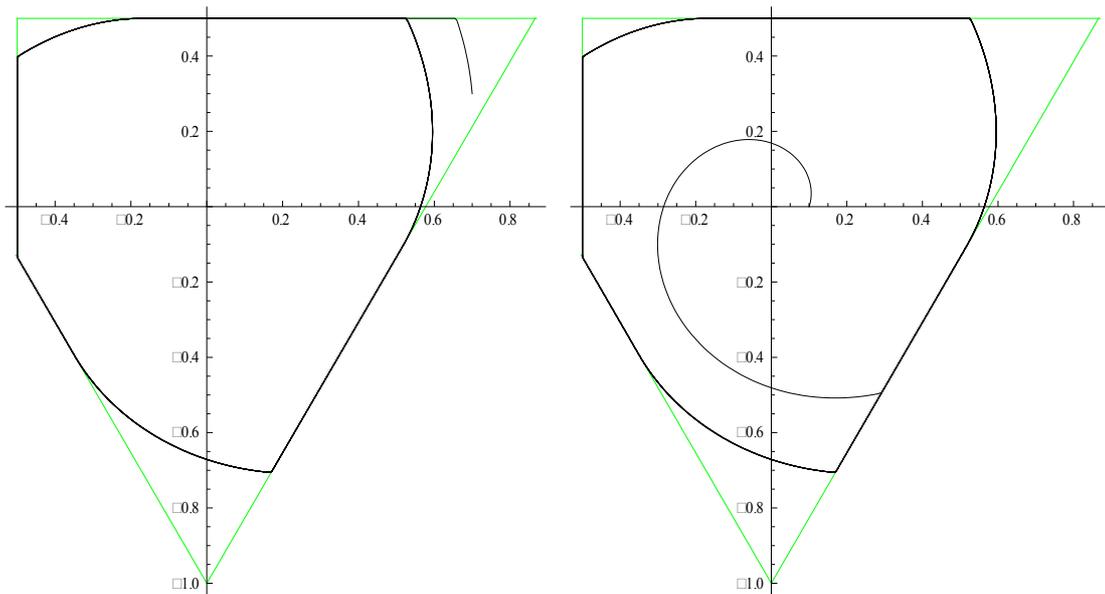


Рис. 1. Замкнутая траектория

Если возьмем $\varepsilon = 0.24641 < \varepsilon_0$, то на множестве Q решение системы (1) с начальным условием (18) не имеет замкнутой траектории (см. Рис. 2).

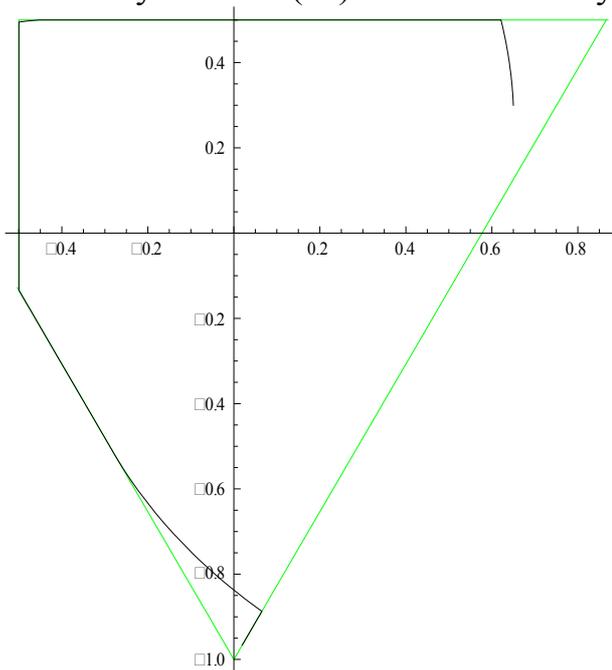


Рис. 2. Незамкнутая траектория

Библиографический список

1. Красносельский М.А., Покровский А.В., *Системы с гистерезисом*, М., 1983.

2. Лобанова О.А., Садовский Б.Н., *О двумерных динамических системах с ограничением*, Дифф. Ур., 2007, том 43, №4, с. 449-456.

3. Нгуен Тхи Хиен. *О точности гладкой модели системы с диодной нелинейностью*, Вестник ВГУ, Серия: Физика, Математика, 2010, №2, с. 240 - 243.

}} Nguyen Thi Hien

}} **The generalized theorem on the existence and uniqueness of limit cycle and an example of its application.**

}} **Abstract:** In this paper we formulate and prove a generalized theorem on the existence and uniqueness of limit cycle. The usefulness of the theorem illustrated via a concrete example.

}} **Keywords:** generalized theorem, convex closed set, closed path, tangent and normal cones.

УДК 629

И.А. Панкратов*, Я.Г. Сапунков**, Ю.Н. Челноков*

*- ФГБОУ ВПО Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

** - ФГБУН Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук, г. Саратов, Россия

ПРИМЕНЕНИЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЙЛЕРА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ НЕДЕФОРМИРУЕМОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА*

Аннотация. В статье с помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионного уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) решается задача оптимальной переориентации орбиты КА. Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Функционал, определяющий качество процесса управления, равен взвешенной интегральной сумме времени переориентации орбиты КА и модуля (или квадрата) управления. Сформулированы дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА. Получены законы оптимального управления, построены условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Приведены примеры численного решения задачи. Работа является развитием [1, 2].

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, ориентация, кватернион, оптимальное управление.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00165-а).*

1. Постановка задачи.

Пусть необходимо определить ограниченное по модулю управление u :

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max}, \quad (1)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [3, 4]

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\Lambda}{dt} &= \Lambda \circ \Omega_{\xi}, \quad \Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 i_1 + \Lambda_2 i_2 + \Lambda_3 i_3, \quad \Omega_{\xi} = u \frac{r}{c} (\cos \varphi i_1 + \sin \varphi i_2), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0 \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \Lambda(0) = \Lambda^H \quad (3)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ? \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \Lambda(t^*) = \pm \Lambda^* \quad (4)$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt \quad \text{или} \quad J_2 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

Здесь Λ – нормированный кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); \circ – символ кватернионного умножения; i_1, i_2, i_3 – векторные мнимые единицы Гамильтона; $r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиуса-вектора центра масс КА; $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости \mathbf{v} центра масс КА); u – проекция вектора реактивного ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА); φ – истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты.

Отметим, что в рассматриваемом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

При $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ имеем задачу переориентации орбиты, оптимальную в смысле быстрогодействия; при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ минимум функционала J_2 означает минимум затрат характеристической скорости [5].

Величины $c, p, e, \varphi_0, \Lambda^h$ и Λ^* заданы (начальное и конечное значения кватерниона Λ могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты (долгота восходящего узла Ω_u , наклон орбиты I , угловое расстояние до перицентра ω_π)). Подлежат определению оптимальный закон управления $u = u(t)$ и величины t^*, φ^* .

Кватернион Λ является нормированным, поэтому краевое кватернионное условие (4), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\text{vect} \left[\tilde{\lambda}(t^*) \circ \Lambda^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \right] = \mathbf{0}, \quad (5)$$

эквивалентное трем скалярным (в (5) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион).

Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

Отметим, что так как компоненты кватерниона Λ (параметры Эйлера) является медленно меняющимися функциями времени (или истинной аномалии), то уравнения (2) являются более пригодными для численного

решения задачи по сравнению с кватернионными уравнениями ориентации орбитальной системы координат [6 - 8]. В то же время кватернионное уравнение ориентации орбитальной системы координат удобно использовать для поиска аналитических решений (см., например, работы [9, 10]).

2. Законы оптимального управления.

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [11]. Для этого введем дополнительную кватернионную переменную $\mathbf{M} = M_0 + M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3$ и скаляр χ , сопряжённые по отношению к фазовым переменным Λ и φ соответственно. Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \chi \frac{c}{r^2} + u \frac{r}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi),$$

где N_1, N_2 – компоненты кватерниона $\mathbf{N} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{M}$; а σ – подынтегральное выражение в функционале качества.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$2 \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, \quad (6)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{2\chi}{r} \frac{dr}{dt} + u \frac{r}{2c} (N_1 \sin \varphi - N_2 \cos \varphi) - u \frac{r^2}{2c^2} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi) \frac{dr}{dt}. \quad (7)$$

Законы оптимального управления (т.е. законы управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности) находятся из условий максимума функции H по переменной u с учетом наложенного ограничения (1) и имеют вид:

1. В случае $\sigma = 1$ (быстродействие)

$$u^{\text{опт}} = u_{\max} \text{sign } k, \quad k = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi. \quad (8)$$

2. В случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$

$$u^{\text{опт}} = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} k, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |k| \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \text{sign } k, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |k| > u_{\max}. \end{cases} \quad (9)$$

3. В случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$

$$u^{\text{опт}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |k| - 1 < 0, \\ u_{\text{max}} \text{ sign } k, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |k| - 1 > 0, \\ u^{\text{особ}} \in [-u_{\text{max}}; u_{\text{max}}], & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |k| - 1 \equiv 0. \end{cases} \quad (10)$$

Случай особого управления $u^{\text{особ}}$, когда $r|k| \equiv 2\alpha_2 c$ на некотором промежутке времени, в работе не рассматривается.

3. Условия трансверсальности.

Рассматриваемая краевая задача является задачей с подвижным правым концом траектории. Поэтому необходимо составить условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (5):

$$\text{при } t = t^* \quad \mathbf{M} - \Lambda^* \circ \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3, \quad \chi = 0. \quad (11)$$

Исключая из (11) неопределённые множители Лагранжа A_1, A_2, A_3 , получим следующие условия трансверсальности:

$$\text{при } t = t^* \quad \Lambda_0^* M_0 + \Lambda_1^* M_1 + \Lambda_2^* M_2 + \Lambda_3^* M_3 = 0, \quad \chi = 0. \quad (12)$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (6), (7), (8) (или (9), или (10)) десятого порядка и восемью краевыми условиями (3), (5), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (12) и равенством функции Гамильтона-Понтрягина нулю в конце движения, имеющим место для оптимального управления $u^{\text{опт}}$ и оптимальной траектории.

4. Уравнения в безразмерных переменных.

Для численного решения рассматриваемой краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Фазовые Λ_j и сопряженные M_j переменные являются безразмерными. Безразмерные модуль радиуса-вектора r^b , время t^b и управление u^b связаны с размерными переменными r, t и u соотношениями: $r = Rr^b, t = Tt^b, u = u_{\text{max}} u^b$. Здесь R – характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); $T = R^2 / c$ – характерное время.

При численном решении задачи удобно перейти к новой независимой переменной – истинной аномалии. При этом порядок краевой задачи понижается на две единицы.

Система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$2 \frac{d\Lambda}{d\varphi} = Nu^b (r^b)^3 \Lambda \circ (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2), \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}.$$

Здесь $N = u_{\max} R^3 / c^2$ – характерный безразмерный параметр задачи.

Ограничение по управлению в безразмерном виде

$$-1 \leq u^b \leq 1.$$

Система сопряженных уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$2 \frac{d\mathbf{M}}{d\varphi} = Nu^b (r^b)^3 \mathbf{M} \circ (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2).$$

Отметим, что в дальнейшем верхние индексы у безразмерных переменных опускаются.

5. Примеры численного решения задачи.

Задачи оптимального управления решались для функционалов J_1 и J_2 . Алгоритмы численного решения задач реализуют комбинацию метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска [12].

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [13] (a_{or} – большая полуось орбиты):

$$a_{or} = 25500000 \text{ м}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35.$$

Начальная ориентация орбиты КА ($\varphi_0 = 3.940323$ рад):

$$\Lambda_0^H = 0.679417, \quad \Lambda_1^H = -0.245862, \quad \Lambda_2^H = 0.539909, \quad \Lambda_3^H = -0.353860.$$

Расчёты были проведены для двух вариантов конечной ориентации орбиты КА:

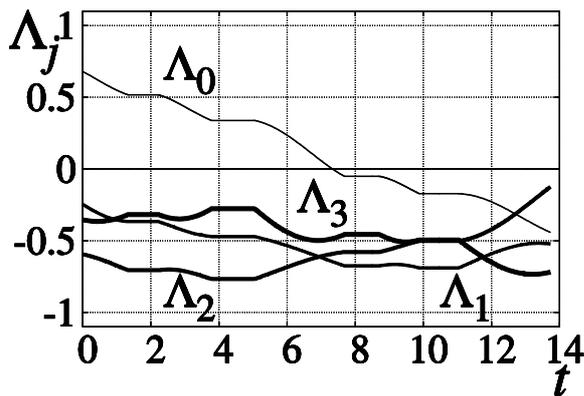
малое отличие в ориентациях орбит КА:

$$\Lambda_0^* = 0.678275, \quad \Lambda_1^* = -0.268667, \quad \Lambda_2^* = 0.577802, \quad \Lambda_3^* = -0.366116;$$

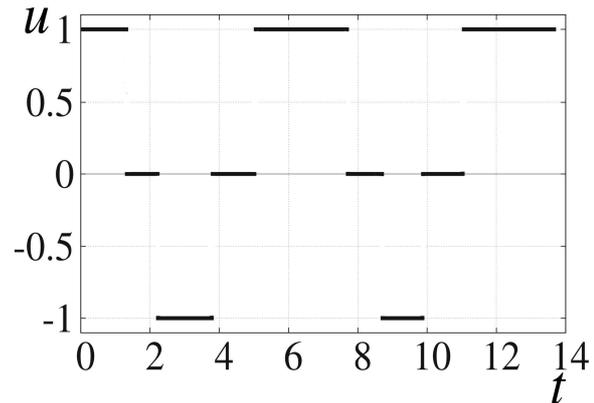
большое отличие в ориентациях орбит КА:

$$\Lambda_0^* = -0.440542, \quad \Lambda_1^* = -0.522476, \quad \Lambda_2^* = -0.125336, \quad \Lambda_3^* = -0.719189.$$

Значения выбранных масштабирующих множителей равны: $R = 26000000$ м, $T = 9449.714506$ с. (Эти величины соответствуют значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведённым в [14].)

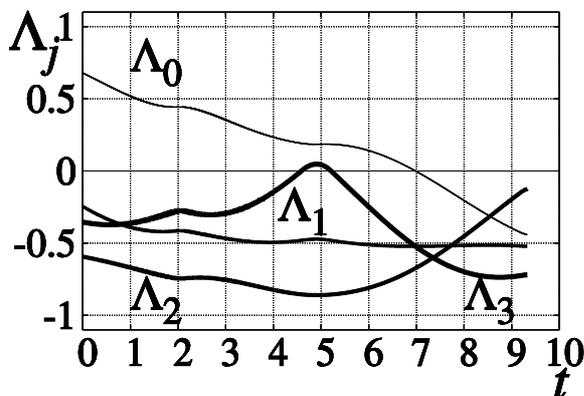


а) Фазовые координаты

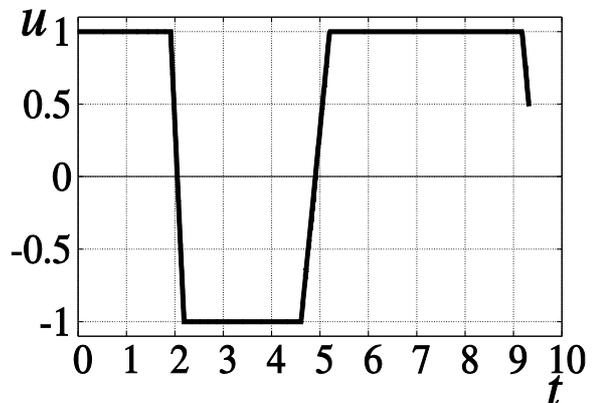


б) Оптимальное управление

Рис. 1: Эллиптическая орбита ($e=0.25$), вариант 2, минимум характеристической скорости



а) Фазовые координаты



б) Оптимальное управление

Рис. 2: Эллиптическая орбита ($e=0.5$), вариант 2, минимизация затрат времени и энергии

В первом варианте отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов; а во втором – десятки градусов.

На рис. 1, 2 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для случая минимизации затрат характеристической скорости

($e = 0.25$) и случая минимизации функционала $J_1 = \int_0^{t^*} (1 + 4.2u^2) dt$ ($e = 0.5$)

для второго варианта конечного положения орбиты КА.

Отметим выявленную неединственность численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА, связанную с нелинейностью дифференциальных уравнений задачи. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления (с одним и тем же функционалом) получены различные решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них было выбрано то, при котором функционал минимален.

Отметим также, что в случае быстрогодействия и при минимизации функционала J_2 оптимальное управление носит релейный характер, что доставляет большие неудобства при численном решении задачи.

В ходе численного решения задачи были выявлены особенности и закономерности построенных оптимальных траекторий и управлений. Так, установлено, что при увеличении эксцентриситета орбиты от 0 до 0.5 уменьшается количество активных участков движения, их длительности и общее время переориентации.

В случае малого различия начальной и конечной ориентаций орбит (единицы градусов) время переориентации, а также диапазоны изменения фазовых и сопряженных переменных меньше, чем в случае, когда различие начальной и конечной ориентаций орбит составляет десятки градусов.

Библиографический список

1. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Численное исследование задачи управления ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика. 2010. № 12. С. 170-173.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87-95.
3. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
4. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация орбиты космического аппарата, оптимальная в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 8. С. 74-78.
5. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А. [и др.] М.: Наука, 1976. 864 с.
6. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып. 5. С. 502-517.
7. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70-73.
8. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84-92.
9. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84-89.
10. Панкратов И. А. Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97-105.
11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

12. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.

13. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488-505.

14. Бордовицына Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.

I.A. Pankratov, Ya.G. Sapunkov, Yu.N. Chelnokov

Using of slowly varying Euler's parameters in the problem of optimal control of undeformable spacecraft orbit orientation

Abstract. In this paper the problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit is solved with the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion equation of spacecraft orbit orientation. Control (thrust vector, orthogonal to the orbital plane) is limited in magnitude. Functional, which determines a quality of control process is weighted sum of time and impulse (or square) of control. We have formulated differential boundary problems of reorientation of spacecraft's orbit. Optimal control laws, transversality conditions, not containing Lagrange multipliers, examples of numerical solution of the problem are given. In this paper we develop the results obtained in [1, 2].

Keywords: spacecraft, orbit, orientation, quaternion, optimal control.

УДК 629

И.А. Панкратов*, Я.Г. Сапунков**, Ю.Н. Челноков*

*- ФГБОУ ВПО Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

** - ФГБУН Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук, г. Саратов, Россия

КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ НЕДЕФОРМИРУЕМОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ*

Аннотация. В статье с помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионного уравнения ориентации орбитальной системы координат решается задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Функционал, определяющий качество процесса управления, равен взвешенной интегральной сумме времени переориентации орбиты КА и модуля (или квадрата) управления. Сформулированы дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА. Получены законы оптимального управления, построены условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Приведены примеры численного решения задачи. Работа является развитием [1, 2].

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, ориентация, кватернион, оптимальное управление.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00165-а).*

1. Постановка задачи.

Пусть необходимо определить ограниченное по модулю управление u :

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max}, \quad (1)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [3, 4]

$$2 \frac{d\lambda}{dt} = \lambda \circ \omega_\eta, \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3, \quad \omega_\eta = u \frac{r}{c} i_1 + \frac{c}{r^2} i_3, \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const},$$

переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0 \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \lambda^H = \Lambda^H \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (3)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ? \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \lambda(t^*) = \lambda^* = \pm \Lambda^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \quad (4)$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt \quad \text{или} \quad J_2 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

Здесь λ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат; кватернионная переменная Λ характеризует ориентацию орбиты КА; \circ – символ кватернионного умножения; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; $r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиуса-вектора центра масс КА; $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости \mathbf{v} центра масс КА); u – проекция вектора реактивного ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА); φ – истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты.

В рассматриваемом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

При $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ имеем задачу переориентации орбиты, оптимальную в смысле быстроедействия; при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ минимум функционала J_2 означает минимум затрат характеристической скорости [5].

Величины $c, p, e, \varphi_0, \Lambda^h$ и Λ^* заданы (начальное и конечное значения кватерниона Λ могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты (долгота восходящего узла Ω_u , наклон орбиты I , угловое расстояние до перицентра ω_π)). Подлежат определению оптимальный закон управления $u = u(t)$ и величины t^*, φ^* .

Отметим, что кватернионное уравнение (2) является весьма удобным для поиска аналитических решений (см., например, работы [6, 7]).

Кватернион Λ является нормированным, поэтому краевое кватернионное условие (4), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\text{vect} \left[\tilde{\lambda}(t^*) \circ \Lambda^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \right] = \mathbf{0}, \quad (5)$$

эквивалентное трем скалярным (в (5) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион).

Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

2. Законы оптимального управления.

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [8]. Для этого введем дополнительную кватернионную переменную $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i}_1 + \mu_2 \mathbf{i}_2 + \mu_3 \mathbf{i}_3$ и скаляр χ , сопряжённые по отношению к фазовым переменным $\boldsymbol{\lambda}$ и φ соответственно. Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \frac{1}{2} \left[\frac{r}{c} v_1 u + \frac{c}{r^2} (v_3 + 2\chi) \right],$$

где v_1, v_3 – компоненты кватерниона $\mathbf{v} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$; σ – подынтегральное выражение в функционале качества.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$2 \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad (6)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \left[\frac{1}{r} (v_3 + 2\chi) - \frac{r^2}{2c^2} v_1 u \right] \frac{dr}{dt}. \quad (7)$$

Законы оптимального управления (т.е. законы управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности) находятся из условий максимума функции H по переменной u с учетом наложенного ограничения (1) и имеют вид:

1. В случае $\sigma = 1$ (быстродействие)

$$u^{\text{опт}} = u_{\max} \text{sign } v_1. \quad (8)$$

2. В случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$

$$u^{\text{опт}} = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} v_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \text{sign } v_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| > u_{\max}. \end{cases} \quad (9)$$

3. В случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$

$$u^{\text{опт}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| - 1 < 0, \\ u_{\max} \text{sign } v_1, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| - 1 > 0, \\ u^{\text{особ}} \in [-u_{\max}; u_{\max}], & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| - 1 \equiv 0. \end{cases} \quad (10)$$

Случай особого управления $u^{особ}$, когда $r|v_1| \equiv 2\alpha_2 c$ на некотором промежутке времени, в работе не рассматривается.

3. Условия трансверсальности.

Рассматриваемая краевая задача является задачей с подвижным правым концом траектории. Поэтому необходимо составить условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (5):

$$\text{при } t = t^* \quad \mu - \Lambda^* \circ A = 0, \quad A = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3, \quad \chi + A_3 \cos \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (11)$$

Исключая из (11) неопределённые множители Лагранжа A_1 , A_2 , A_3 , получим следующие условия трансверсальности:

$$\begin{aligned} \Lambda_0^* \mu_0 + \Lambda_1^* \mu_1 + \Lambda_2^* \mu_2 + \Lambda_3^* \mu_3 &= 0, \\ 2\chi + (\Lambda_0^* \mu_3 - \Lambda_1^* \mu_2 + \Lambda_2^* \mu_1 - \Lambda_3^* \mu_0) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вместо условий (12) могут быть использованы другие формы условий трансверсальности, получаемые из (12) и имеющие вид:

$$\begin{aligned} v_0 \cos \frac{\varphi}{2} - v_3 \sin \frac{\varphi}{2} &= 0, \\ 2\chi + \left(v_3 \cos \frac{\varphi}{2} + v_0 \sin \frac{\varphi}{2} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

или

$$\begin{aligned} 2\chi + v_3 &= 0, \\ v_0 \cos \frac{\varphi}{2} + 2\chi \sin \frac{\varphi}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (6), (7), (8) (или (9), или (10)) десятого порядка и восемью краевыми условиями (3), (5), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (12) (или (13), или (14)) и равенством функции Гамильтона-Понтрягина нулю в конце движения, имеющим место для оптимального управления $u^{опт}$ и оптимальной траектории.

4. Уравнения в безразмерных переменных.

Для численного решения рассматриваемой краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Фазовые λ_j и сопряженные μ_j переменные являются безразмерными. Безразмерные модуль радиуса-вектора r^b , время t^b и управление u^b связаны с размерными переменными r , t и u соотношениями: $r = Rr^b$, $t = Tt^b$, $u = u_{\max} u^b$. Здесь R – характерное

расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); $T = R^2 / c$ – характерное время.

Итак, система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$2 \frac{d\lambda}{dt^b} = \lambda \circ \left(Nu^b r^b \mathbf{i}_1 + \frac{1}{(r^b)^2} \mathbf{i}_3 \right), \quad \frac{d\varphi}{dt^b} = \frac{1}{(r^b)^2}, \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}.$$

Здесь $N = u_{\max} R^3 / c^2$ – характерный безразмерный параметр задачи.

Ограничение по управлению в безразмерном виде

$$-1 \leq u^b \leq 1.$$

Система сопряженных уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$2 \frac{d\mu}{dt^b} = \mu \circ \left(Nu^b r^b \mathbf{i}_1 + \frac{1}{(r^b)^2} \mathbf{i}_3 \right).$$

При этом безразмерное уравнение для переменной χ составлять не нужно, так как значение переменной χ необходимо знать лишь в конечный момент времени для проверки условия, наложенного на функцию Гамильтона-Понтрягина. Это значение можно найти из условий трансверсальности.

Отметим, что в дальнейшем верхние индексы у безразмерных переменных опускаются.

5. Примеры численного решения задачи.

Задачи оптимального управления решались для функционалов J_1 и J_2 . Алгоритмы численного решения задач реализуют комбинацию метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска [9].

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [10] (a_{or} – большая полуось орбиты):

$$a_{or} = 25500000 \text{ м}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35.$$

Начальная ориентация орбиты КА ($\varphi_0 = 3.940323$ рад):

$$\Lambda_0^H = 0.679417, \quad \Lambda_1^H = -0.245862, \quad \Lambda_2^H = 0.539909, \quad \Lambda_3^H = -0.353860;$$

$$\lambda_0^H = 0.061834, \quad \lambda_1^H = -0.451574, \quad \lambda_2^H = 0.457446, \quad \lambda_3^H = 0.763545.$$

Расчёты были проведены для двух вариантов конечной ориентации орбиты КА:

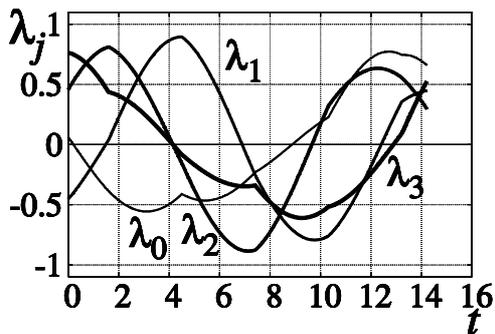
малое отличие в ориентациях орбит КА:

$$\Lambda_0^* = 0.678275, \quad \Lambda_1^* = -0.268667, \quad \Lambda_2^* = 0.577802, \quad \Lambda_3^* = -0.366116;$$

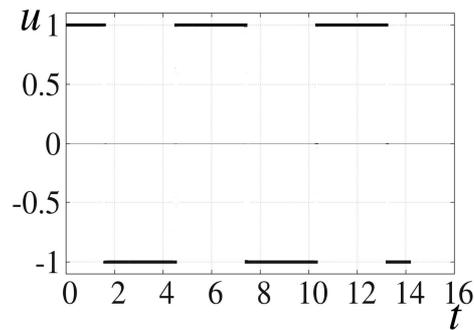
большое отличие в ориентациях орбит КА:

$$\Lambda_0^* = -0.440542, \quad \Lambda_1^* = -0.522476, \quad \Lambda_2^* = -0.125336, \quad \Lambda_3^* = -0.719189.$$

Значения выбранных масштабирующих множителей равны: $R = 26000000$ м, $T = 9449.714506$ с. (Эти величины соответствуют значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведённым в [11].)

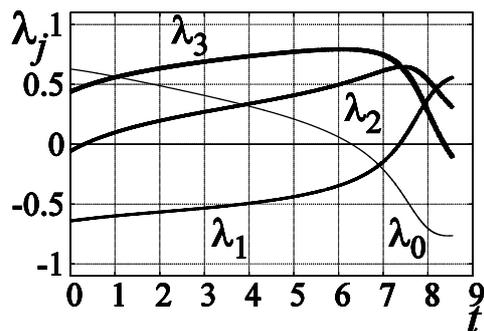


а) Фазовые координаты

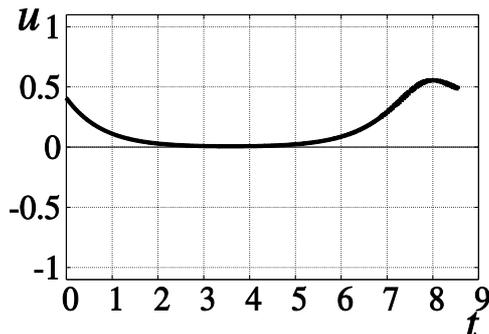


б) Оптимальное управление

Рис. 1: Круговая орбита, второй вариант, быстродействие



а) Фазовые координаты



б) Оптимальное управление

Рис. 2: Эллиптическая орбита, первый вариант, минимизация затрат времени и энергии

В первом варианте отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов; а во втором – десятки градусов.

На рис. 1, 2 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для случая быстродействия ($e=0$) для второго варианта конечного положения орбиты КА и случая минимизации функционала

$$J_1 = \int_0^{t^*} (1 + 4.2u^2) dt \text{ для первого варианта } (e=0.5).$$

Отметим, что длительности второго – пятого участков активного движения КА в случае быстродействия близки друг к другу.

Отметим также, что особенно трудно искать решение задачи быстродействия и минимизировать функционал J_2 , так как в этих случаях оптимальное управление имеет релейный характер.

Библиографический список

1. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Численное исследование задачи переориентации орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат // Математика. Механика. 2012. № 14. С. 132-136.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84-92.
3. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып. 5. С. 502-517.
4. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70-73.
5. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А. [и др.] М.: Наука, 1976. 864 с.
6. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84-89.
7. Панкратов И. А. Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97-105.
8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
9. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
10. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488-505.
11. Бордовицына Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.

~ I.A. Pankratov, Ya.G. Sapunkov, Yu.N. Chelnokov

~ **Quaternion solution of the problem of optimal reorientation of the undeformable spacecraft orbit with using the orbital coordinate system**

~ **Abstract.** In this paper the problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit is solved with the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion equations of orbital coordinate system orientation. Control (thrust vector, orthogonal to the orbital plane) is limited in magnitude. Functional, which determines a quality of control process is weighted sum of time and impulse (or square) of control. We have formulated differential boundary problems of reorientation of spacecraft's orbit. Optimal control laws, transversality conditions, not containing Lagrange multipliers, examples of numerical solution of the problem are given. In this paper we develop the results obtained in [1, 2].

~ **Keywords:** spacecraft, orbit, orientation, quaternion, optimal control.

УДК 681.518:351.74:519.1

А.В. Папонов

УФСИН России по Воронежской области, Воронеж, Россия

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ ПРОИСШЕСТВИЙ

Аннотация: В статье разрабатывается программная реализация проверки гипотезы о нормальном распределении временных характеристик модели управления системы специального назначения при возникновении происшествий.

Ключевые слова: принятие решений, структурно-параметрическая модель, проверка гипотезы, закон распределения

В повседневной деятельности органам управления часто приходится сталкиваться с внештатными ситуациями, требующими принятия нестандартных управленческих решений. Данная особенность наиболее применима к системам управления силовых структур, которые принято относить к системам управления специального назначения [1].

При проведении преобразований систем специального назначения, направленных на их развитие и совершенствование возрастают требования, предъявляемые к своевременности и качеству принимаемых управленческих решений.

Вышеупомянутые инновационные мероприятия, как правило, осуществляются в условиях существующих деструктивных воздействий, которые негативным образом отражаются на реализации системой своих функций и могут приводить к различным внештатным ситуациям.

Особенностью внештатных ситуаций на объектах систем управления специального назначения является то, что несвоевременные и неправильные действия исполнителей могут привести в дальнейшем к причинению вреда здоровью, гибели людей, излишним материальным затратам.

Следует отметить, что процесс принятия решений при возникновении внештатных ситуаций является очень сложным. Это обуславливается наличием определенной специфики задач, решаемых подразделениями систем специального назначения в условиях противодействия со стороны криминальной среды.

В настоящее время разработан целый ряд мер организационного характера по превентивным действиям возникновения различных происшествий. Однако, как показывает практика, полностью исключить появление внештатных ситуаций на объектах систем управления специального назначения невозможно.

Важно отметить, что происшествия при отсутствии своевременных ликвидационных действий, могут приводить к значительным материальным и даже людским потерям, способствовать социально-экономической дестабилизации в регионе их возникновения. Возникающие происшествия характеризуются многогранностью форм проявления и требуют принятия нестандартных управленческих решений. Каждая внештатная ситуация имеет свои определенные характерные особенности (область охвата, степень потенциальной опасности, скорость распространения и т.д.), поэтому практически важным является получение оценок эффективности различных вариантов управленческих решений. Именно поэтому в настоящий момент особое значение приобретает использование научного подхода к организации и осуществлению управления при возникновении происшествий. В частности, возникает необходимость оценки эффективности принимаемых решений.

В [2,3,4,5] были разработаны структурно-параметрические модели управления при возникновении различных внештатных ситуаций, которые позволяют произвести оценки длительности совокупности действий исполнителей при проведении операции. С целью получения вероятностно-временных оценок различных управленческих решений необходимо знание закона распределения вероятностей этих оценок.

На время выполнения действий в ходе проведения операции при возникновении внештатной ситуации оказывает влияние целый комплекс факторов, зависящих как от характеристик отдельных исполнителей, так и от влияния воздействий внешней среды. В связи с этим длительность каждого исполняемого действия исполнителем носит вероятностный характер. Поэтому оценка длительности всей совокупности действий лиц, принимающих участие в операции, также носит вероятностный характер. Зная закон распределения вероятностей этой оценки с помощью методов теории вероятностей можно получить оценки вероятности выполнения совокупности действий за заданное время.

Применение центральной предельной теоремы [6] для определения вида зависимости в данной ситуации не представляется возможным, по следующим причинам:

– нельзя говорить об одинаковом распределении случайных величин, описывающих длительность выполнения отдельных операций в связи с тем, что числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия) различны;

– случайные величины не являются независимыми, т. к. изменение во времени одной операции может в некоторых случаях приводить к изменению времени выполнения других операций;

– время выполнения всей совокупности действий не является суммой длительностей отдельных действий, а представляет собой сложную функциональную зависимость [7,8].

Была выдвинута гипотеза о нормальности закона распределения длительности действий исполнителей при возникновении внештатных ситуаций на объектах систем специального назначения. В целях автоматизации процедуры подтверждения или опровержения гипотезы в среде Borland Delphi 7 написана компьютерная программа Verification_of_hypothesis.exe.

Программа предназначена для проверки соответствия эмпирических результатов модели управления при возникновении происшествий на объекте системы специального назначения нормальному закону распределения.

Программа, используя критерий Пирсона, при заданном уровне значимости, производит проверку согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X по результатам выборки.

Исходными данными для проведения проверки являются характеристики объекта, определяющие порядок организации деятельности по осуществлению функций по поддержанию штатного режима функционирования системы.

Пользователю необходимо произвести ввод следующих данных:

- матрица смежности совокупности действий исполнителей, принимающих участие в ликвидации последствий возникшей внештатной ситуации;

- матрица исполнителей, несущая информацию о том, каким исполнителем будет выполняться определенное действие;

- матрицы минимального и максимального времени выполнения определенного действия конкретным исполнителем;

- величина уровня значимости α .

Алгоритм работы программы представлен на рисунке 1.

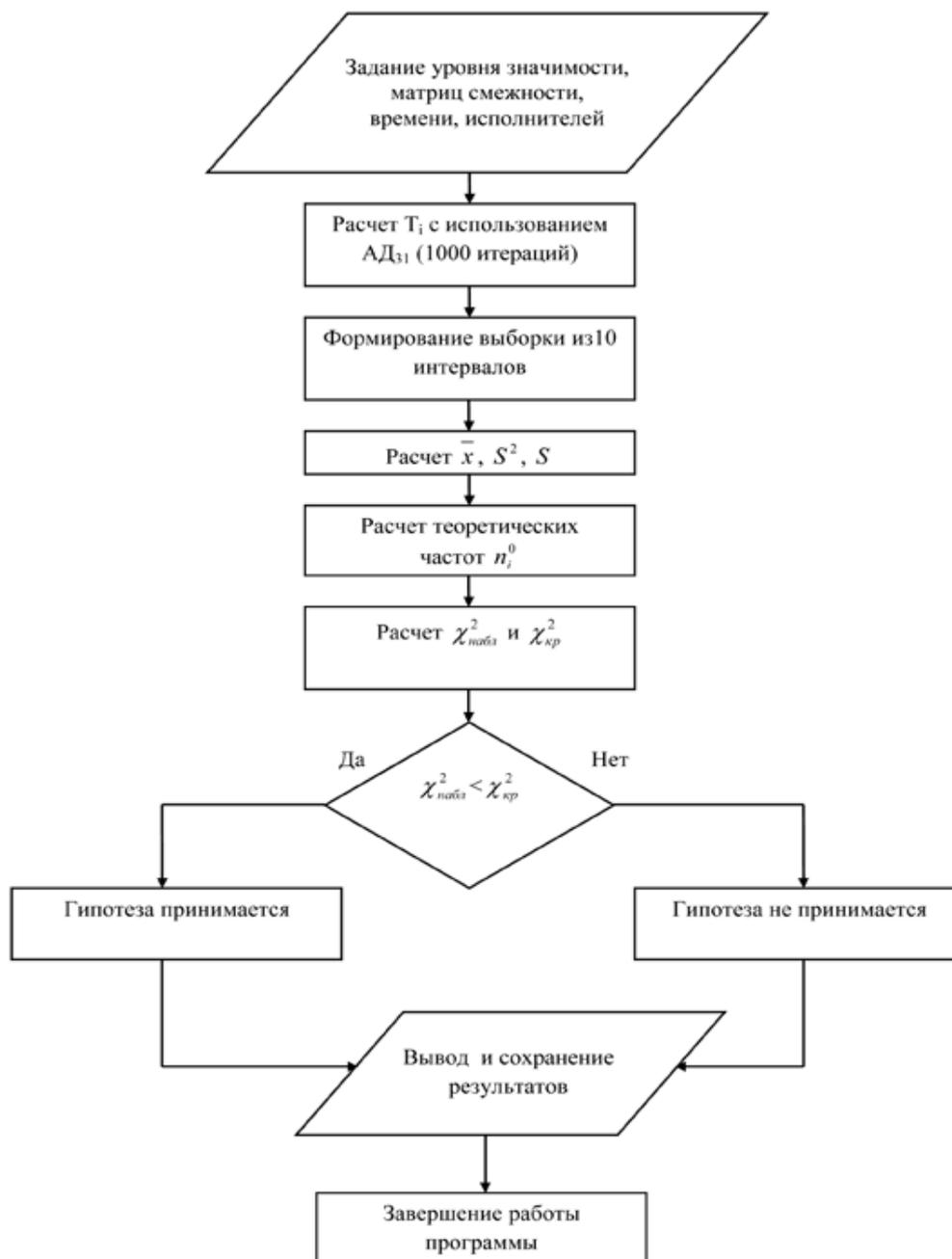


Рис.1. Алгоритм работы программы проверки гипотезы о нормальном распределении длительности действий исполнителей при возникновении происшествия

В результате работы программа производит расчет данных эксперимента, которые сохраняются в файл `dat.txt` в каталоге, из которого запущен файл программы. Конечными данными являются: выборочное среднее, выборочная исправленная дисперсия, выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение, хи-квадрат наблюдаемое, хи-квадрат критическое.

По результатам полученных данных при заданном уровне значимости и числе степеней свободы программа дает заключение о соответствии результатов функционирования модели управления при возникновении

происшествий на объекте системы специального назначения нормальному закону распределения.

В результате работы программы была произведена проверка соответствия нормальному закону распределения длительностей операций по пресечению последствий внештатных ситуации для всех возможных типов происшествий, возникающих на объектах систем управления специального назначения.

Библиографический список

1. Меньших В.В. Структурная адаптация систем управления. / В.В. Меньших, В.В. Сысоев. – М.: Радиотехника, 2002. – 150 с.
2. Меньших В.В. Вероятностно-временная модель действий должностных лиц при возникновении происшествий на объекте уголовно-исполнительной системы. // В.В. Меньших В.В., А.В. Папонов // Вестник Воронежского института МВД России. – 2011. – №3. – с.128–134.
3. Меньших В.В. Разработка структурно-параметрической модели действий должностных лиц по пресечению вооруженных нападений на объекты уголовно-исполнительной системы. / В.В. Меньших, А.В. Папонов / Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2012. – №9. – 206 с. – с.99–103.
4. Меньших В.В. Разработка структурно-параметрической модели действий сотрудников учреждения ФСИН России по пресечению массовых беспорядков / В.В. Меньших А.В. Папонов / Вестник Воронежского института ФСИН России, 2013. – №1. – с.55–59.
5. Папонов А.В. Разработка структурно-параметрической модели действий сотрудников учреждения ФСИН России по освобождению заложников. / А.В. Папонов / Актуальные проблемы деятельности подразделений УИС: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции / ФКОУ ВПО Воронежский институт ФСИН России. – Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2012. – 787с. – с.238–241.
6. Г. Крамер, Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975 – 648 с.
7. Меньших В.В. Структурная адаптация систем управления. / В.В. Меньших, В.В. Сысоев. – М.: Радиотехника, 2002. – 150 с.
8. Меньших В.В. О задаче оптимизации порядка выполнения запросов в вычислительных системах / Автоматика и вычислительная техника, 1993. – № 1 – с. 3–9.

~ A. V. Paponov

~ **Software implementation test the hypothesis about normal distribution of the temporal characteristics of the model management system special purpose in the event of accidents.**

~ **Abstract.** In article software implementation test the hypothesis about normal distribution of the temporal characteristics of the model management system special purpose in the event of accidents is developed.

~ **Keywords:** decision making, structural-parametric model, hypothesis testing, law of distribution

УДК 517.977.56

Е.Н.Провоторова

ФБГОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»,
Воронеж, Россия

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального быстрогодействия для линейной дифференциальной системы с распределенными параметрами на графе. Представлены условия существования оптимального управления в пространствах типа С.Л. Соболева. Указаны пути анализа нелинейных задач быстрогодействия.

Ключевые слова: дифференциальная система, распределенные параметры на графе, оптимальное быстродействие

1. Введение. Для эволюционной системы на геометрической сети, описываемой начально-краевой задачей для линейного параболического уравнения с распределенными параметрами на графе, рассматривается задача оптимального быстрогодействия в пространстве слабых решений (слабых состояний системы). Получены условия существования оптимального управления, указаны подходы к решению задачи в нелинейном случае.

2. Основные понятия и определения. Пусть Γ – связный ограниченный замкнутый ориентированный граф с ребрами γ_k (каждое ребро параметризовано отрезком $[0,1]$). Обозначим через $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ множество граничных ζ_k и внутренних ξ_k ребер, соответственно (узел назовем граничным, если к нему примыкает только одно ребро, в противном случае – внутренним). Далее для каждого внутреннего узла $\xi \in J(\Gamma)$ графа введем следующие два множества: $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ – множество ребер ориентированных «от узла ξ ». Функция $f(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\Gamma}_T = \Gamma \times [0,T]$ (или $f(x)$, $x \in \Gamma$) определяется как совокупность сужений $f(x,t)_\gamma$, $(x,t) \in \bar{\gamma}_T = \gamma \times [0,T]$ (или $f(x)_\gamma$, $x \in \gamma$) на каждое ребро $\gamma \subset \Gamma$; интеграл $\int_{\Gamma_T} f(x,t) dx dt$ (или $\int_{\Gamma} f(x) dx$) понимается как сумма вида $\sum_{\gamma \in \Gamma_T} \int_{\gamma} f(x,t)_\gamma dx dt$ (или $\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} f(x)_\gamma dx$). Детальное описание всех обозначений приведено в [1, 2].

В области $\bar{\Gamma}_T = \Gamma \times [0, T]$ ($T < \infty$) рассмотрим начально-краевую задачу относительно функции $y(x, t)$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial y(1, t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial y(0, t)_\gamma}{\partial x}, \quad (2)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$y|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

здесь $a(x)$, $b(x)$ – измеримые ограниченные на Γ функции: $0 < \alpha_0 \leq a(x) \leq \alpha^0$, $|b(x)| \leq \beta$; $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x, t) \in L_1(\Gamma_T)$ с нормой

$$PuP_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_\Gamma u^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt.$$

В приложениях (прикладных задачах сплошных сред) соотношения (2) суть условия согласования, аналогичные обобщенным условиям Киргхофа [3, 4] (баланс напряжений в узлах электрических цепей, баланс сил натяжений в узлах упругих систем, гидродинамический баланс в узлах гидродинамических сетей), соотношения (3) и (4) – начальные и краевые условия, соответственно.

Введем необходимое для дальнейшего исследования пространство допустимых решений задачи (1)–(4) [5, 6]. Обозначим через $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ пространство функций $u(x, t)$ из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную также из $L_2(\Gamma_T)$, $PuP_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} = \left(\int_{\Gamma_T} (u^2 + u_x^2) dx dt \right)^{1/2}$. Пусть далее

$V_2(\Gamma_T)$ – множество всех функций $u(x, t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму, определяемую соотношением

$$PuP_{2, \Gamma_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)},$$

и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, т. е. таких, что $\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ равномерно на $[0, T]$. Множество $\Omega_0(\Gamma_T)$ функций $u(x, t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) как функции класса $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$; пространство $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ определяется как замыкание непрерывных на Γ и гладких на каждом ребре $\gamma \subset \Gamma$ функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям согласования

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma u'(1)_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma u'(0)_\gamma$$

и условиям Дирихле

$$u|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Замыкание множества $\Omega_0(\Gamma_T)$ в норме $V_2(\Gamma_T)$ обозначим через $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$: $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Определение 1 [2, 4]. Слабым решением класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $y(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y(x, t) \eta(x, t) dx + \int_{\Gamma_t} \left(-y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \right) dx dt + \ell_t(y, \eta) = \\ = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_t} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (5)$$

для любых $t \in [0, T]$ и при любой $\eta(x, t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ ($W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ определяется аналогично пространству $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$); $\ell_t(y, \eta)$ – билинейная форма вида

$$\ell_t(y, \eta) = \int_{\Gamma_t} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x) y(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt.$$

Замечание. Соотношения (2) и (4) в определении слабого решения «погружены» в описания пространств $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$. Таким образом, начально-краевую задачу (1)–(4) можно трактовать как начальную задачу (задачу Коши) для операторного уравнения с оператором, определенным на $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$.

Теорема 1 [5]. *Задача (1)–(4) однозначно разрешима в пространстве $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, обобщенное решение $y(x, t)$ непрерывно зависит от исходных данных $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, причем имеет место оценка*

$$P y P_{2, \Gamma_T} \leq c (\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} + \|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}),$$

постоянная c зависит только от заданных постоянных $\alpha_0, \alpha^0, \beta$.

Доказательство теоремы использует сепарабельность пространства $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, т. е. существование счетного, плотного в $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ множества, каковым является система обобщенных собственных функций спектральной задачи для системы (1)–(4) [6–8].

3. Задача оптимального быстрогодействия. Для дифференциальной системы, состояние которой определяется как слабое решение начально-

краевой задачи (1)–(4) рассмотрим задачу оптимального управления. Пусть $U = L_2(\Gamma_T)$ и $B: U \rightarrow L_2(\Gamma_T)$ – линейный непрерывный оператор, причем $Bv \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ для любого $v \in U$ (последнее вытекает из цепочки неравенств:

$$PfP_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} f^2(x,t) dx \right)^{1/2} dt \leq \sqrt{T} \sqrt{\int_0^T \int_{\Gamma} f^2(x,t) dx dt} = \sqrt{T} PfP_{L_2(\Gamma_T)},$$

справедливой для любых $f \in L_2(\Gamma_T)$). Если функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ – заданные элементы пространств $L_{2,1}(\Gamma_T)$, $L_2(\Gamma)$, соответственно, и $v(x,t) \in U$, то в силу теоремы 1 существует зависящее от функции $v(x,t)$ единственное слабое решение $y(v)(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ (состояние системы) начально-краевой задачи (1)–(4) с правой частью в уравнении (1), равной $f + Bv$. Прямым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Задача (1)–(4) (для $f + Bv$, $v \in U$) однозначно разрешима в $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, имеет место непрерывность линейного отображения $v \rightarrow y(v)$ пространства U в $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и оценка вида*

$$PyP_{2,\Gamma_T} \leq C(\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} + \|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} + \|v\|_U), \quad (6)$$

где C – фиксированная постоянная. Соотношение (5) в определении 1 трансформируется к виду:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t) dx + \int_{\Gamma_t} \left(-y(x,t) \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right) dx dt + \ell_t(y, \eta) = \\ & = \int_{\Gamma} \varphi(x)\eta(x,0) dx + \int_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t) dx dt + \int_{\Gamma_t} Bv(x,t)\eta(x,t) dx dt \end{aligned} \quad (7)$$

для любых $t \in [0, T]$ и при любой $\eta(x,t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$

Пусть U_{δ} – выпуклое замкнутое подмножество пространства $U = L_2(\Gamma_T)$, y_* – заданный элемент пространства $L_2(\Gamma)$.

Определение 2. Дифференциальная система называется управляемой, если существует такой элемент $v \in U_{\delta}$, что

$$y(v)(x, \tau) = y_*(x)$$

для некоторого $\tau \in [0, T]$ ($T < \infty$ – фиксированная постоянная).

Задача оптимального управления состоит в определении $\tau_* = \inf \tau$. Элемент $v_* \in U_{\delta}$, соответствующий такому τ_* , назовем оптимальным управлением дифференциальной системы в смысле быстрогодействия, т. е. $y(v_*)(x, \tau_*) = y_*(x)$, $x \in \Gamma$.

Приведем условия существования оптимального управления дифференциальной системы в смысле быстрогодействия. Отметим, прежде всего, два очевидных свойства, касающихся билинейной формы $\ell_t(\phi, \psi)$:

1) для любых элементов $\phi, \psi \in W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ функция $t \rightarrow \ell_t(\phi, \psi)$ измерима на $(0, T)$ и $|\ell_t(\phi, \psi)| \leq c \|\phi\| \|\psi\|$,

2) для любого элемента $\phi \in W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ и любого $t \in (0, T)$ существует такое число λ , что

$$\ell_t(\phi, \phi) + \lambda[\phi]^2 \geq \alpha \|\phi\|^2, \quad \alpha > 0,$$

где через $[\phi]$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$, $\|\omega\|$ – норма в $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$: $\|\omega\| = ([\phi] + [\phi_x])^{1/2}$.

Теорема 3. Пусть U_∂ – ограниченное подмножество пространства U . Тогда существует оптимальное в смысле быстрогодействия управление $v_* \in U_\partial$.

Доказательство. В силу управляемости дифференциальной системы построим минимизирующую последовательность $\{v_n\} \subset U_\partial$, т. е. последовательность управляющих функций $v_n(x, t) \in U_\partial$ ($n = 1, 2, \dots$), для которых $\tau_1 > \tau_2 > \dots$ и τ_n таковы, что

$$y(v_n)(x, \tau_n) = y_*(x). \quad (8)$$

В силу $\tau_n \in (0, T)$ числовая последовательность $\{\tau_n\}$ сходится к $\tau_0 \in [0, T]$. Положим $y_n = y(v_n)$. Так как множество U_∂ ограничено, то в силу неравенства (6) и свойств билинейной формы $\ell_t(\phi, \psi)$ элементы y_n остаются в ограниченном подмножестве пространства $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, а значит, из последовательности $\{v_n, y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{\tilde{v}_n, \tilde{y}_n\}$ ($\tilde{y}_n = y(\tilde{v}_n)$), что

а) \tilde{v}_n слабо сходится к \tilde{v} в норме пространства U ,

б) \tilde{y}_n слабо сходится к \tilde{y} в норме пространства $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Заметим при этом, что числовая последовательность $\{\tau_n\}$ содержит убывающую подпоследовательность $\{\tilde{\tau}_n\}$ ($y(\tilde{v}_n)(x, \tilde{\tau}_n) = y_*(x)$), также сходящуюся к $\tau_0 \in [0, T]$.

Из соотношений (7) для $v = \tilde{v}_n$, $y = \tilde{y}_n$ следует, что при $n \rightarrow \infty$ (7) справедливо и для $v = \tilde{v}$, $y = \tilde{y}$, а потому

$$\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{v})$$

является слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4). Но если рассмотреть очевидное тождество

$$y(\tilde{v}_n)(x, \tilde{\tau}_n) - y(\tilde{v})(x, \tau_*) = y(\tilde{v}_n)(x, \tilde{\tau}_n) - y(\tilde{v})(x, \tilde{\tau}_n) + y(\tilde{v})(x, \tilde{\tau}_n) - y(\tilde{v})(x, \tau_*),$$

учитывая $y(\tilde{v})(x, \tilde{\tau}_n) \rightarrow y(\tilde{v})(x, \tau_*)$ слабо в пространстве $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ (это следует из $y(\tilde{v})(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и свойства непрерывности по t в норме $L_2(\Gamma)$ функций пространства $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$) и вытекающую из свойства (б) слабую сходимость $y(\tilde{v}_n)(x, t) \rightarrow y(\tilde{v}_n)(x, t)$ на элементах последовательности $\{\tilde{\tau}_n\}$, то получим, что

$$y(\tilde{v}_n)(x, \tilde{\tau}_n) \rightarrow y(\tilde{v})(x, \tau_*)$$

слабо в $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$. Отсюда и из равенства (8) заключаем, что $y(v_*)(x, \tau_*) = y_*(x)$ и \tilde{v} – оптимальное по быстродействию управление: $\tilde{v} = v_*$. Теорема доказана.

4. Заключение. В работе рассмотрен достаточно распространенный в приложениях случай оптимального по быстродействию управления дифференциальной системой, состояние $y(v)(x, t)$ которой описывается решением начально-краевой задачей (1)–(4). Хотя применение методов демонстрируется для указанного управления и наблюдения, используемые приемы обладают большой общностью и применимы к другим видам управлений и наблюдений, например граничным [3, 4]. В последнем случае $U = L_2(\partial\Gamma_T)$, а состояние системы определяется как обобщенное решение задачи (1)–(4) с краевым условием $y|_{\partial\Gamma} = v$ вместо (4). Следует отметить, что в работах [9–11] рассмотрены другие подходы при анализе прикладных задач управления, родственных им задач оптимизации [12, 13], устойчивости [13–16] и стабилизации [17, 18], имеющие, однако, аналогичную трактовку условий существования оптимального управления. Отметим также, что изучаемая задача допускает в представлении уравнения (1) особенности в виде стохастической компоненты [19] и разрывной нелинейности [20–23].

Библиографический список

1. Провоторов В. В., Волкова А. С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Изд-во "Научная книга". 2014. 188 с.
2. Волкова А. С., Гнилицкая Ю. А., Провоторов В. В. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе // Системы управления и информационные технологии. № 1 (51). 2013. С. 11-15.
3. Провоторов В.В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы "мачта-растяжки". Системы управления и информационные технологии. 2008. Т. 32. № 2.2. С. 293-297.
4. Провоторов В. В., Гнилицкая Ю. А. Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 112-120.
5. Провоторов В. В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета.

Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 3. С. 154-163.

6. Волкова А. С., Провоторов В. В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

7. Провоторов В.В. Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на графе-пучке // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 50-62.

8. Провоторов В.В. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде // Математический сборник. 2008. Т. 199. № 10. С. 105-126.

9. Подвальный С. Л. Особенности поисковой градиентной оптимизации сложных объектов с использованием сопряженных систем // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56, № 2. С. 18-22

10. Подвальный С. Л., Васильев Е. М. Многоальтернативные системы: концепция, состояние и перспективы // Управление большими системами: сб. трудов. Москва: Изд-во ИПУ РАН, 2014. № 48. С. 6-58.

11. Подвальный С. Л., Васильев Е. М. Эволюционные принципы построения интеллектуальных систем многоальтернативного управления // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 57, № 3. С. 4-8.

12. Podval'ny S. L., Ledeneva T. M. Intelligent Modeling Systems: Design Principles // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74, N 7. P. 1201-1210.

13. Подвальный С. Л. Решение задач градиентной оптимизации каскадно-реакторных схем с использованием сопряженных систем // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9, № 2. С. 27-32.

14. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 3. С. 495-508.

15. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.

16. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2012. № 5. С. 3-12.

17. Веремей Е. И., Корчанов В. М. Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 126-137.

18. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 116-133.

19. Карелин В. В. Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 4. С. 109-114.

20. Потапов Д. К. Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2 С. 19-24.

21. Volkova A. S., Gnilitskaya Yu. A., Provotorov V. V. On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs. Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75, N 2. P. 405-412.

22. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions Automation and Remote Control. Automation and Remote Control. 2015. Т. 76. № 2. С. 318-322.

23. Евстафьева В.В. Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей// Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 42-56.

~ E.N. Provotorova

~ **A problem of optimal performance in evolutionary processes**

~ **Abstract.** The problem of time-optimal for a linear differential system with distributed parameters on the graph. Presents the conditions of existence of an optimal control in spaces of type SL Sobolev. Ways of analysis of nonlinear optimal problems.

~ **Keywords:** differential system, distributed parameters on the graph, the optimum performance

УДК 621.396.67

А.И. Рябчунов

ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет",
Воронеж, Россия.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛО-ЧАСТОТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ
АНТЕННЫ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ
СЛОЯ ДИЭЛЕКТРИКА, ЭКРАНИРОВАННОГО РЕШЕТКОЙ**

Аннотация. Исследована угловая чувствительность антенны дифракционного излучения. Использована двухмерная модель экранированного планарного диэлектрического волновода. Получены частотные зависимости угла излучения и угло-частотной чувствительности для разных параметров модели. Обсуждаются результаты исследования.

Ключевые слова: Антенна, диэлектрический волновод, решетка, угло-частотная чувствительность.

Антенны дифракционного излучения (АДИ), принцип работы которых связан с трансформацией дифракционной решеткой принимаемой свободной волны в поверхностную волну замедляющей системы [1-3], относятся к антенным решеткам с последовательным типом питания элементов. В связи с этим таким антеннам присуща зависимость углового положения максимума диаграммы направленности (ДН) от частоты (или электрического размера периода решетки) и коэффициента замедления поверхностной волны в распределительно-излучающей системе АДИ [4]. В зависимости от

назначения АДИ такого рода угловая дисперсия должна быть либо ослаблена, либо усилена. В первом случае обеспечивается возможность функционирования АДИ в расширенной полосе частот, в пределах которой отклонение максимума главного лепестка ДН не выходит за пределы его ширины [5], что важно для широкополосных систем связи. Второй случай актуален при реализации частотного сканирования ДН [6-7], положенного в основу работы различного рода радаров. В связи с этим представляется целесообразным исследовать угло-частотную чувствительность АДИ, распределительно-излучающая система которой образована планарным диэлектрическим волноводом (ПДВ, поз. 1 на рис. 1), размещенным над дифракционной решеткой отражательного типа (поз. 2). Подобная электродинамическая схема, как утверждается в работах [1-2], перспективна для проектирования микроволновых антенн, предназначенных для частотного сканирования или работы в полосе частот с фиксированным угловым направлением главного лепестка ДН. Необходимость такого исследования во многом обусловлена тем, что подобного рода сведения, приводимые в научной и учебной литературе, являются весьма обрывочными [3,8] и не позволяют быстро и корректно выбрать параметры замедляющей системы в виде экранированного решеткой ПДВ для обеспечения требуемой угловой дисперсии.

Цель работы – на основе упрощенной электродинамической модели исследовать угло-частотную чувствительность рассматриваемой схемы АДИ для разных материалов и толщины ПДВ, а также электрического размера периода решетки и, тем самым, частично устранить дефицит информации, необходимой для проектирования современных микроволновых АДИ.

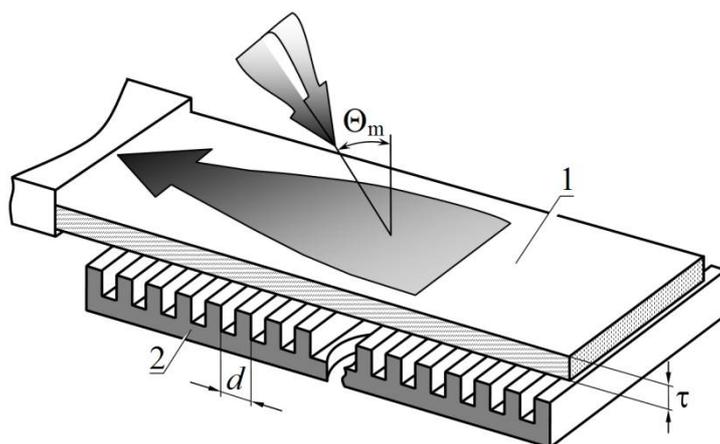


Рис. 1. Типовая электродинамическая схема АДИ

Для достижения поставленной цели предлагается использовать двумерную неограниченную в продольном направлении модельную структуру (рис. 2), в которой дифракционная решетка заменена гладким

металлическим экраном, а возбуждение осуществляется собственной волной ПДВ заданного поляризационного качества.

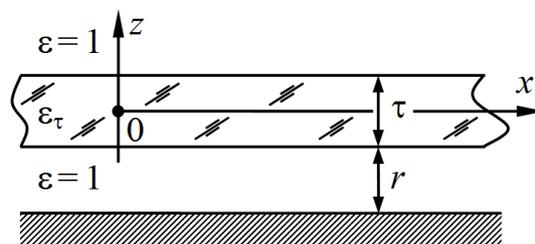


Рис. 2. Модельная структура для исследования угловой дисперсии АДИ

Замена дифракционной решетки гладким металлическим экраном вполне допустима в случае слабой электродинамической связи ПДВ с решеткой [3,7]. Ослабление такой обратной связи, как правило, имеет место при удалении ПДВ от решетки, то есть при увеличении воздушного зазора (r , рис. 2). Из источников [3,9] следует, что воздушный зазор величиной в 2 - 3 длины волны (λ) практически устраняет влияние экранирующей дифракционной решетки на замедление поверхностной волны и соответственно угловое направление ДН при фиксированной частоте. Однако увеличение зазора до указанных величин может приводить к существенному снижению излучательной способности АДИ, характеризуемой ее КПД. Поэтому возьмем воздушный зазор между ПДВ и решеткой (гладким экраном) для определенности равным периоду решетки (d , рис. 1), который в одноволновом режиме (ДН с одним дифракционным лепестком) не превышает длины волны. В большинстве случаев такая величина зазора не должна приводить к заметному влиянию решетки на дисперсионные свойства антенны, за исключением, быть может, случаев проявления резонансов в распределительно-излучающей системе АДИ [9-11].

Разумно также считать, что в немагнитном диэлектрическом материале ПДВ, характеризуемом вещественной относительной диэлектрической проницаемостью (ϵ_τ , рис. 2), а также в металле гладкого экрана полностью отсутствуют тепловые потери.

При указанных ограничениях и возбуждении модельной структуры собственной волной ПДВ E -типа (с вектором E , ориентированным в плоскости рис. 2) замедление фазовой скорости поверхностной волны в структуре можно рассчитать на основе решения приведенного в [8] характеристического (или дисперсионного) уравнения. Дисперсионное уравнение для постоянной распространения собственной волны E -типа ПДВ, экранированного гладким металлическим экраном, адаптированное в работе [12] к задаче дифракционного излучения, представлено ниже:

$$j\sin(\eta_0\tau) \left[\frac{\gamma_0\epsilon_\tau(1-e^{j2\gamma_0r})}{\eta_0} + \frac{\eta_0(1+e^{j2\gamma_0r})}{\gamma_0\epsilon_\tau} \right] = 2\cos(\eta_0\tau),$$

где $\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 - \beta_0^2}$, $\eta_0 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_\tau - \beta_0^2}$, $k_0 = 2\pi/\lambda$;

j – мнимая единица ($j = \sqrt{-1}$);

τ – толщина ПДВ (рис. 1 и 2)

β_0 – искомая постоянная распространения поверхностной волны (в направлении Ox), определяющая коэффициент замедления фазовой скорости волны: $\xi = \beta_0/k_0$.

Зная коэффициент замедления фазовой скорости ξ , несложно рассчитать угловую ориентацию главного лепестка ДН [4]

$$\Theta_m = -\arcsin\left(\xi + n \cdot \frac{\lambda}{d}\right)$$

($n = -1$ – дифракционный порядок лепестка ДН, d – период решетки) и угло-частотную чувствительность АДИ по формуле [13]:

$$\mathcal{S} = -\frac{\partial \Theta_m}{\partial f/f} = -\frac{1}{\cos \Theta_m} \left(\xi + f \frac{\partial \xi}{\partial f} - \sin \Theta_m \right)$$

(f – циклическая частота волны).

Для расчета частотных зависимостей углового направления максимума главного лепестка ДН и угло-частотной чувствительности АДИ на основе приведенных формул составлена компьютерная программа в системе математического моделирования MathCAD, с использованием которой получены результаты, приведенные ниже.

На рис. 3 - 6 представлены зависимости от величины электрического размера периода решетки ($d/\lambda = f \cdot d/c$) углового направления максимума главного лепестка ДН (Θ_m) и угло-частотной чувствительности АДИ (\mathcal{S} в градусах на один процент изменения частоты) для разных значений относительной диэлектрической проницаемости материала ПДВ (ε_τ) и его толщины (τ). Предполагалось, что параметры ПДВ (ε_τ , τ и r) таковы, что обеспечивают существование лишь одной его собственной волны (моды) E -типа [14].

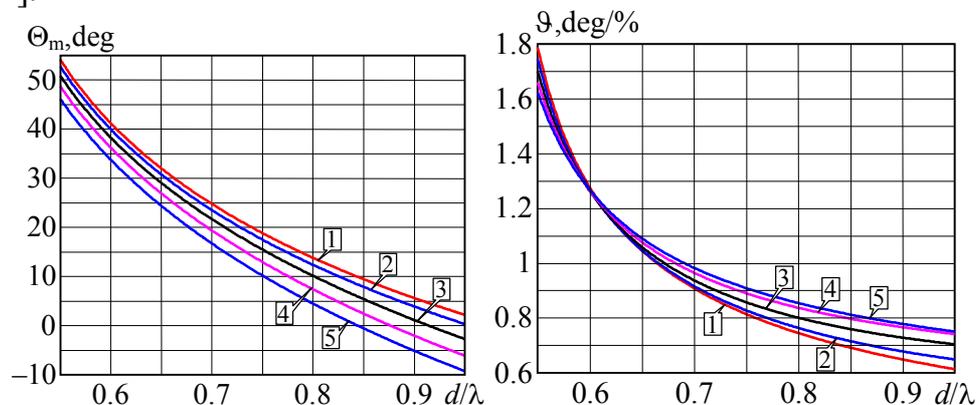


Рис. 3. Частотные характеристики АДИ при $\varepsilon_\tau = 2$ и разных τ/d :

1 – 0.1, 2 – 0.2, 3 – 0.3, 4 – 0.4, 5 – 0.5

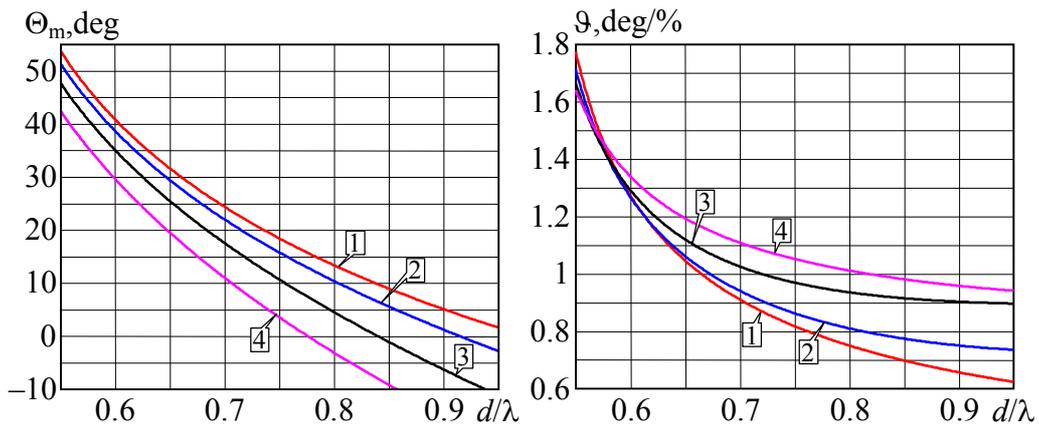


Рис. 4. Частотные характеристики АДИ при $\varepsilon_\tau=3$ и разных τ/d :
1 – 0.1, 2 – 0.2, 3 – 0.3, 4 – 0.4

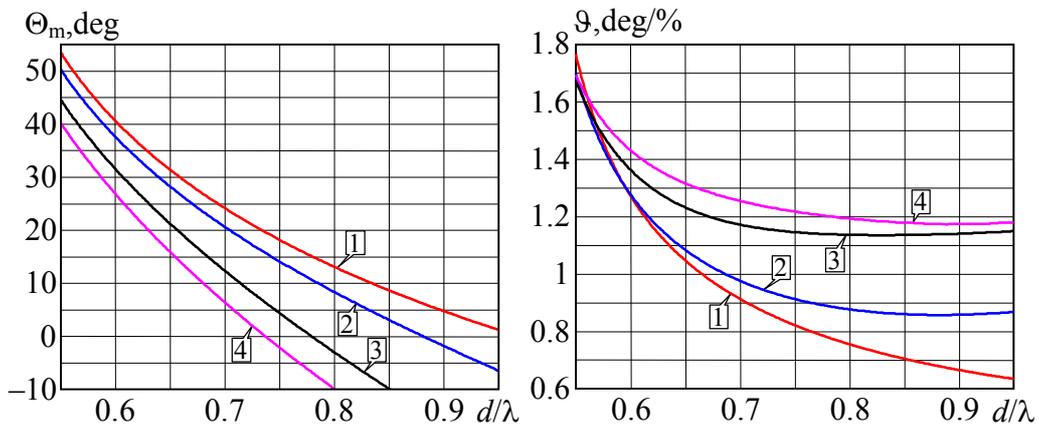


Рис. 5. Частотные характеристики АДИ при $\varepsilon_\tau=4$ и разных τ/d :
1 – 0.1, 2 – 0.2, 3 – 0.3, 4 – 0.35

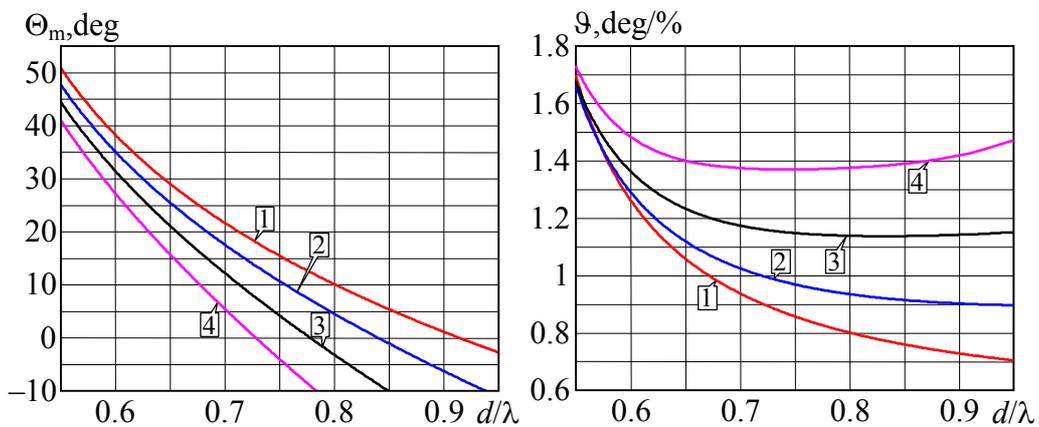


Рис. 6. Частотные характеристики АДИ при $\tau/d=0.3$ и разных ε_τ :
1 – 2, 2 – 3, 3 – 4, 4 – 5

На основании полученных данных можно сделать следующие выводы:

1) при слабой связи ПДВ и решетки угло-частотная чувствительность, обусловленная дисперсионными свойствами замедляющей структуры, может составлять от 0.6 до 1.8 градуса на процент изменения частоты;

2) при толщине ПДВ $0.1d$ и менее различия частотных зависимостей, полученных для разных диэлектрических материалов (значений ε_τ), несущественны;

3) для ПДВ с толщиной, превышающей $0.1d$, наибольшая угло-частотная чувствительность для направлений максимума ДН $\Theta_m < 45^\circ$ характерна для случаев большего ε_τ ; к тому же, чем больше толщина τ , тем выше чувствительность АДИ и существеннее степень различия угло-частотных характеристик, полученных для разных диэлектрических материалов (ε_τ);

4) для фиксированной толщины ПДВ τ (рис. 6) увеличение ε_τ приводит к уменьшению абсолютных значений угло-частотной характеристики $\Theta_m(d/\lambda)$, поэтому угловой сектор сканирования, условно ограничиваемый с одной стороны направлением по нормали к ПДВ, также уменьшается;

5) для одного и того же диэлектрического материала (ε_τ) с увеличением толщины ПДВ уменьшается угловой сектор сканирования; при этом в области малых значений параметра d/λ угло-частотная чувствительность снижается, в области больших значений d/λ – несколько увеличивается; чем больше ε_τ , тем значительнее различия ширины углового сектора и величины угловой чувствительности при отличных значениях толщины τ .

Полученные данные об угло-частотной чувствительности позволяют осуществить выбор конкретных параметров ПДВ в распределительно-излучающей системе АДИ. Это дает возможность упростить синтез АДИ, например, по методике, изложенной в [15].

Библиографический список

1. Евдокимов А.П. Антенны дифракционного излучения // Физические основы приборостроения. 2013. Т. 2. № 1. С. 108-124.
2. Останков А.В. Ретроспективный анализ возможностей, конструкций и основных характеристик дифракционных антенн вытекающей волны // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6. № 8. С. 75-81.
3. Шестопапов В.П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. Т. 1. Открытые структуры. Киев: Наукова думка, 1985. 216 с.
4. Хансен Р.С. Фазированные антенные решетки / Пер. с англ. под ред. А.И. Синани. М.: Техносфера, 2012. 558 с.
5. Останков А.В., Калинин Ю.Е., Сахаров Ю.С. Оптимизация распределительно-излучающей системы дифракционной антенны по критерию минимума угловой

дисперсии в полосе частот // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9. № 6-3. С. 30-32.

6. Климов А.И. Разработка и исследование плоских дифракционных антенн СВЧ и КВЧ диапазонов с электрически управляемыми характеристиками. Воронеж: Научная книга, 2010. 118 с.

7. Останков А.В., Калинин Ю.Е. Расчет частотно-сканирующей антенны дифракционного излучения // Радиотехника. 2014. № 3. С. 83-87.

8. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Основы теории антенн: учеб. пособие для вузов. М.: Дрофа, 2007. 491 с.

9. Евдокимов А.П., Крыжановский В.В. Дифракционные явления в антеннах вытекающих волн // Антенны. 2003. № 3-4 (70-71). С. 50-56.

10. Останков А.В. Электродинамические модели резонансных гребенчатых структур для анализа и синтеза высокоэффективных дифракционных антенн: дисс. на соиск. уч. ст. д-ра техн. наук. Воронеж: ФГБОУ ВПО "ВГТУ", 2011. 421 с.

11. Резонансные свойства системы планарный диэлектрический волновод - гребенка / В.В. Крыжановский, С.В. Крыжановский, С.А. Стешенко // Радиофизика и электроника. 2008. Т. 13. № 3. С. 481-488.

12. Останков А.В. Математическая модель дифракции волны на конечной металлодиэлектрической гребенке для проектирования антенн вытекающей волны // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2009. Т. 5. № 7. С. 89-91.

13. Вендик О.Г., Парнес М.Д. Антенны с электронным движением луча. Введение в теорию / Под ред. Л.Д. Бахраха. М.: Радиотехника, 2001. 250 с.

14. Взятыхшев В.Ф. Диэлектрические волноводы. М.: Сов. радио, 1970. 216 с.

15. Останков А.В. Синтез излучающего гребенчатого раскрыва антенны вытекающей волны // Радиотехника. 2012. № 2. С. 38-44.

~ A.I. Ryabchunov

~ **Research of angular-frequency sensitivity of the antenna of diffraction radiation on the basis of the dielectric layer screened by a grid**

~ **Abstract.** Article discusses angular sensitivity of the antenna of diffraction radiation. The author used two-dimensional model of the screened planar dielectric waveguide. The researcher received the frequency dependences of radiation angle and angular-frequency sensitivity for different parameters of model. The author considers results of research.

~ **Keywords:** Antenna, dielectric waveguide, grid, angular-frequency sensitivity.

УДК 656.61.052

В.А. Седов, Н.А. Седова

ФБОУ ВПО «Морской государственный университет им. адм. Г.И. Невельского», Владивосток, Россия

НЕЧЁТКО-ПРОДУКЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАЛЬНОСТИ ВИДИМОСТИ

Аннотация. В статье представлена модель нечётко-продукционной системы, определяющей дальность видимости в надводном пространстве. Определён перечень входных лингвистических переменных: снег, дождь, туман, мгла, дымка, видимость горизонта, – для которых указаны нечёткие множества термов. Также в статье представлен перечень правил нечетких продукций и принципы их формирования.

Ключевые слова: Дальность видимости, лингвистическая переменная, терм-множество, продукционное правило.

Введение

Видимость является предельным расстоянием, на котором днем обнаруживаются суда и другие объекты, а ночью – навигационные огни, их своевременное обнаружение позволяет обеспечивать безопасность судоходства, поэтому определение состояния видимости является актуальной задачей.

Видимость зависит, главным образом, от погодных условий, в метрологии влияние погодных условий на видимость определяется условной шкалой баллов [1], которая является способом указания прозрачности атмосферы, поэтому дальность видимости будем определять с помощью наличия видимости горизонта и некоторых атмосферных условий, таких как: снег, дождь, туман, мгла, дымка. Следует также отметить, что настоящая нечётко-продукционная модель направлена на определение именно дневного состояния видимости.

Описание нечётко-продукционной модели определения дальности видимости

Для определения дальности видимости необходимо определять силу или густоту того или иного атмосферного условия, а также наличие/отсутствие видимости горизонта. В качестве атмосферных условий на вход нечётко-продукционной модели поступает информация о силе снега, силе дождя, густоты тумана, густоты мглы, густоты дымки и возможности видеть горизонт. На выходе нечётко-продукционной модели получаем дальность видимости.

Общая структура разработанной нечётко-продукционной модели определения дальности видимости представлена на рис. 1.

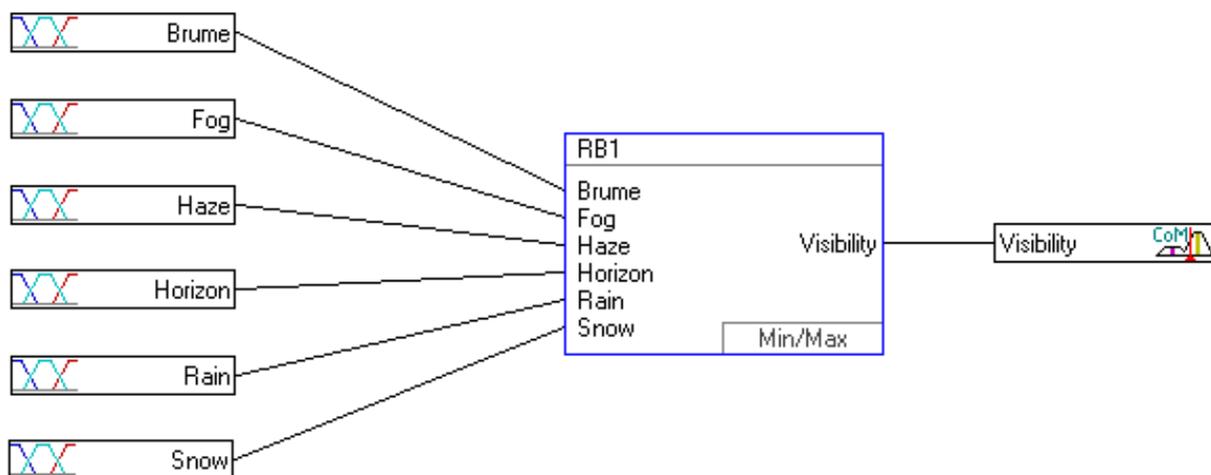


Рис. 1. Схематичное определение дальности видимости

Первая входная лингвистическая переменная [2, 3] «Дымка» (brume) характеризуется базовым терм-множеством {дымки нет, легкая дымка, дымка}. Для наиболее удобного описания лингвистической переменной «Дымка» (как и всех других лингвистических переменных нечётко-продукционной модели определения дальности видимости) принято использовать универсальное множество, представляющее собой отрезок $I = [0; 100]$, на котором определены три функции принадлежности (рис. 2A): дымки нет – NB (no brume); легкая дымка – LB (light brume); дымка – B (brume).

Вторая входная лингвистическая переменная «Туман» (fog) характеризуется базовым терм-множеством {тумана нет, туман, густой туман, очень густой туман}. Для лингвистической переменной «Туман» определены четыре функции принадлежности (рис. 2B): тумана нет – NF (no fog); туман – F (fog); густой туман – TF (thick fog); очень густой туман – VTF (very thick fog).

Третья входная лингвистическая переменная «Мгла» (haze) характеризуется базовым терм-множеством {мглы нет, мгла, густая мгла}. Для лингвистической переменной «Мгла» определены три функции принадлежности (рис. 2C): мглы нет – NH (no haze); мгла – H (haze); густая мгла – TH (thick haze).

Четвёртая входная лингвистическая переменная «Горизонт» (horizon) характеризуется базовым терм-множеством {горизонт не виден, горизонт виден, горизонт виден резко, горизонт виден четко}. Для лингвистической переменной «Горизонт» определены четыре функции принадлежности (рис. 2D): горизонт не виден – HINV (horizon is not visible); горизонт виден – TVH

(the visible horizon); горизонт виден резко – HSS (horizon sees sharply); горизонт виден четко – HCV (horizon clearly visible).

Пятая входная лингвистическая переменная «Дождь» (rain) характеризуется базовым терм-множеством {дождя нет, слабый дождь, ТЗ – дождь, сильный дождь}. Для лингвистической переменной «Дождь» определены четыре функции принадлежности (рис. 2E): дождя нет – NR (no rain); слабый дождь – LR (light rain); дождь – R (rain); сильный дождь – HR (heavy rain).

Шестая входная лингвистическая переменная «Снег» (snow) характеризуется базовым терм-множеством {снега нет, мелкий снег, обычный снег, мокрый снег, пурга}. Для лингвистической переменной «Снег» определены пять функций принадлежности (рис. 2F): снега нет – NS (no snow); мелкий снег – FS (fine snow); обычный снег – NORS (normal snow); мокрый снег – S (sleet); пурга – B (blizzard).

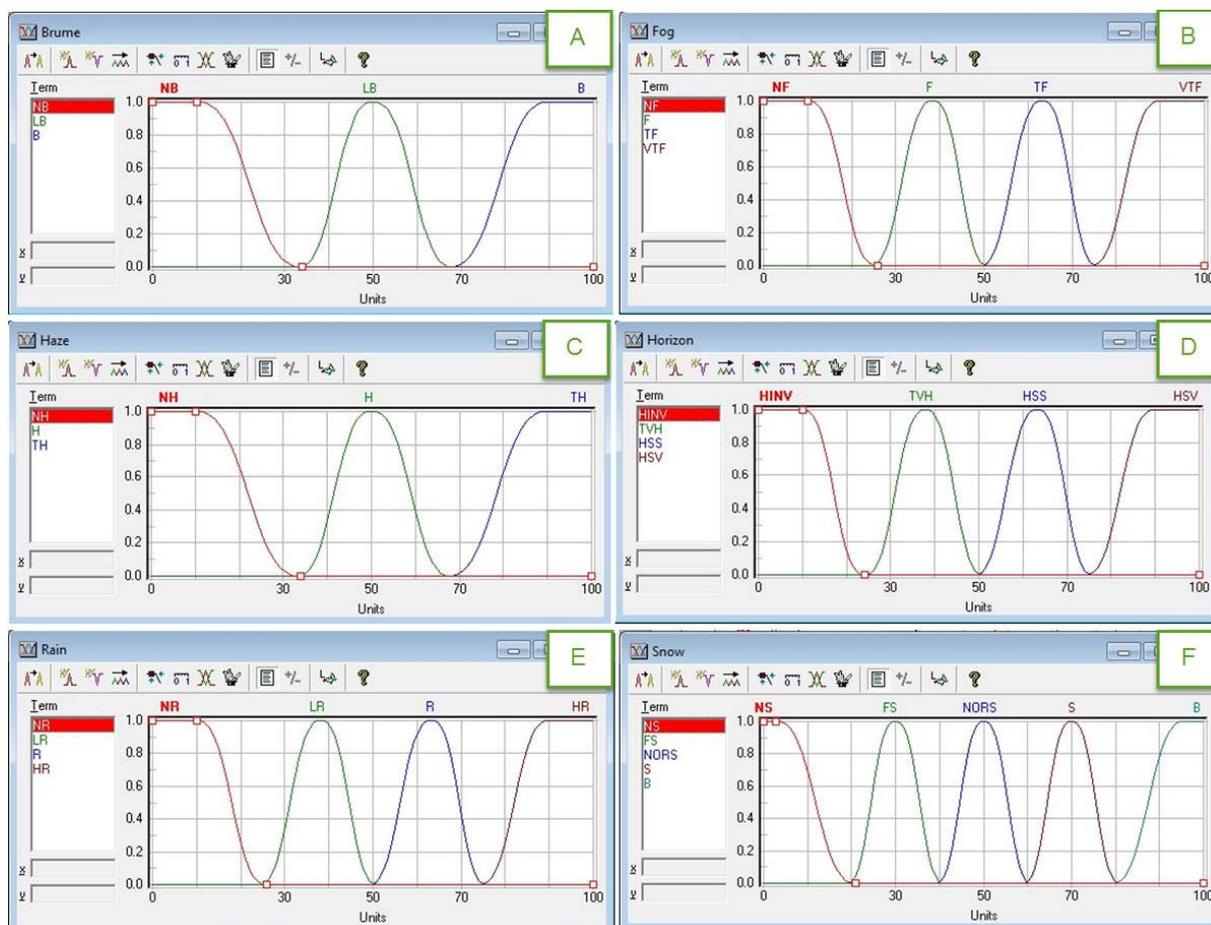


Рис. 2. Лингвистические переменные в среде FuzzyTECH
 А – «Дымка»; В – «Туман»; С – «Мгла»; D – «Видимость горизонта»;
 Е – «Дождь»; F – «Снег»

Выходная лингвистическая переменная «Видимость» (visibility) характеризуется базовым терм-множеством, мощность которого равна 10: {очень плохая видимость, плохая видимость первой степени, плохая видимость второй степени, плохая видимость третьей степени, средняя видимость первой степени, средняя видимость второй степени, средняя видимость третьей степени, хорошая видимость, очень хорошая видимость, исключительная видимость}. Для выходной лингвистической переменной определены соответствующие 10 функций принадлежности (рис. 3): очень плохая видимость – VPV (very poor visibility); плохая видимость I – PV(I) (poor visibility(I)); плохая видимость II – PV(II) (poor visibility(II)); плохая видимость III – PV(III) (poor visibility(III)); средняя видимость I – VM(I) (visibility moderate(I)); средняя видимость II – VM(II) (visibility moderate(II)); средняя видимость III – VM(III) (visibility moderate(III)); хорошая видимость – GV (good visibility); очень хорошая видимость – VVG (visibility very good); исключительная видимость – EV (exceptional visibility).

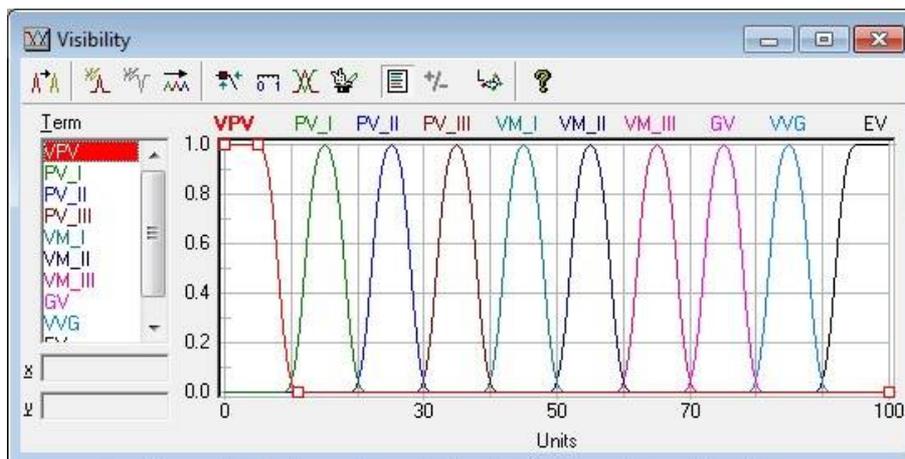


Рис. 3. Выходная лингвистическая переменная «Видимость» в среде FuzzyTECH

База правил нечетких продукций

База правил нечетких продукций нечётко-продукционной модели определения дальности видимости состоит из 24 правил, при этом необходимо отметить следующее. Во-первых, общее число правил нечетких продукций зависит от числа термов входных лингвистических переменных, поскольку в описанной нечётко-продукционной модели шесть входных лингвистических переменных, то общее число правил нечетких продукции должно быть 2880, однако реально возможных ситуаций всего 24. Объясняется это следующими причинами:

1. Для каждого термина выходной лингвистической переменной имеется один терм в каждой входной лингвистической переменной, который является определяющим. Например, терм «очень густой туман» и терм «пурга» являются определяющими для термина «очень плохая видимость» выходной лингвистической переменной «Видимость».

2. Невозможность осуществления тех или иных ситуаций одновременно. Например, терм «слабый дождь» не может существовать вместе с термом «виден горизонт», т.к. первое означает наличие осадков, а, значит, ухудшение видимости горизонта, а второе – их отсутствие.

3. В полном переборе различных ситуаций термов представленной нечётко-продукционной модели имеются т.н. «неактуальные» правила. Например, для термина «очень плохая видимость» выходной лингвистической переменной «Видимость» актуальными являются значения трех термов: терм «очень густой туман» из входной лингвистической переменной «Туман», терм «горизонт не виден» из входной лингвистической переменной «Видимость горизонта» и терм «пурга» из входной лингвистической переменной «Снег», а остальные атмосферные условия могут отсутствовать. Что означает, что наличие таких атмосферных условий как дождь, мгла и дымка, не сыграют существенной роли, т.е. величина дальности видимости от их наличия/отсутствия не изменится. Удаляя «неактуальные» правила из полного перебора правил, уменьшаем затраты временного ресурса, требующегося для внесения правил в программной среде.

Реализация нечётко-продукционной модели определения дальности видимости осуществлялась с использованием программной среды FuzzyTECH [4], на рис. 4 показаны все 24 правила модели, внесенные в программу.

#	IF						THEN	
	Brume	Fog	Haze	Horizon	Rain	Snow	DoS	Visibility
1	NB	VTF	NH	HINV	NR	B	1.00	VPV
2	NB	TF	NH	HINV	NR	B	1.00	VPV
3	NB	F	NH	HINV	NR	B	1.00	VPV
4	NB	NF	NH	HINV	NR	B	1.00	VPV
5	NB	VTF	NH	HINV	NR	S	1.00	VPV
6	NB	VTF	NH	HINV	NR	NORS	1.00	VPV
7	NB	VTF	NH	HINV	NR	FS	1.00	VPV
8	NB	VTF	NH	HINV	NR	NS	1.00	VPV
9	NB	TF	NH	HINV	NR	S	1.00	PV_I
10	NB	F	NH	HINV	NR	S	1.00	PV_I
11	NB	NF	NH	HINV	NR	S	1.00	PV_I
12	NB	TF	NH	HINV	NR	NORS	1.00	PV_I
13	NB	TF	NH	HINV	NR	FS	1.00	PV_I
14	NB	TF	NH	HINV	NR	NS	1.00	PV_I
15	NB	F	NH	HINV	NR	NORS	1.00	PV_II
16	NB	F	NH	HINV	NR	FS	1.00	PV_II
17	NB	F	NH	HINV	NR	NS	1.00	PV_II
18	B	NF	TH	HINV	NR	FS	1.00	PV_III
19	NB	NF	NH	HINV	HR	FS	1.00	VM_I
20	B	NF	H	HINV	R	NS	1.00	VM_II
21	LB	NF	H	HINV	LR	NS	1.00	VM_III
22	NB	NF	NH	TVH	NR	NS	1.00	GV
23	NB	NF	NH	HSS	NR	NS	1.00	VVG
24	NB	NF	NH	HSV	NR	NS	1.00	EV

Рис. 4. База правил нечетких продукций

Тестиране нечётко-продукционной модели определения дальности видимости на различных ситуациях подтвердило её работоспособность. Например, рассмотрим пример № 1 – ситуацию, когда мглы нет, отсутствует дымка и дождь, стоит густой туман, горизонта не видно и поднялась пурга. Анализ такой ситуации позволяет предположить, что она соответствует плохой видимости. Внося указанную информацию в программу, получаем результат, соответствующий терму «очень плохая видимость» (рис. 5А).

В качестве второго примера рассмотрим ситуацию, когда наблюдается мгла, имеются легкая дымка и слабый дождь, отсутствует туман, горизонта не видно, но снега нет. Анализ такой ситуации позволяет предположить среднюю видимость, а тестирование в программе позволяет получить результат (рис. 5В), который соответствует терму «средняя видимость (Ш)».

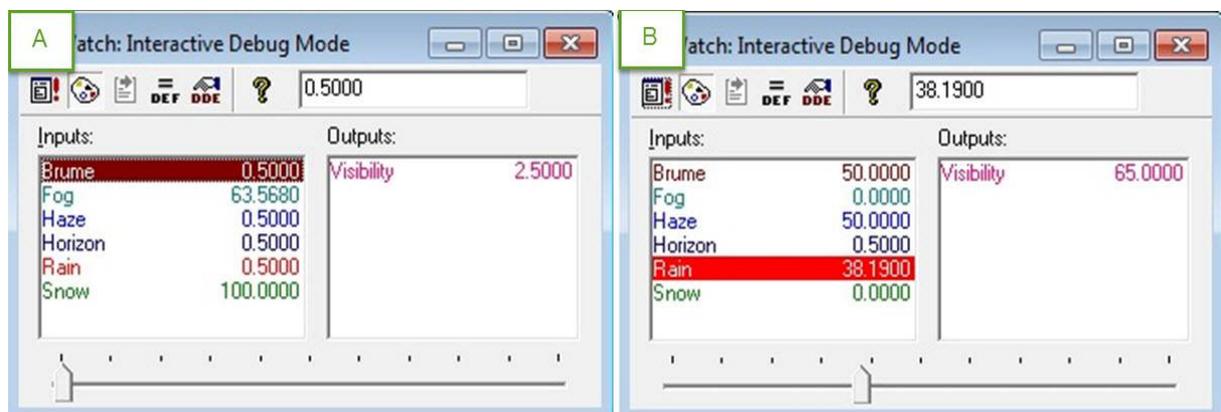


Рис. 5. Результаты тестирования нечётко-продукционной модели.
А – пример №1; В – пример № 2.

Представленная нечётко-продукционная модель определения дальности видимости станет основой для разработки автоматической системы определения степени опасности столкновения морских судов для дальнейшего выбора наилучшего маневра расхождения.

Библиографический список

1. Техническая библиотека – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://neftegaz.ru/tech_library/view/4243.
2. Доровской В.А., Чёрный С.Г. Нечёткие методы и модели управления интеллектуальными системами подводной добычи полезных ископаемых в условиях риска // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2014. № 5 (27). С. 184-191.
3. Винокуров А.С., Белов И.В., Баженов Р.И. Использование метода нечёткого отношения предпочтения для принятия оптимального решения по выбору цифрового фотоаппарата // Современная техника и технологии. 2014. № 11 (39). С. 37-44.

4. Седова Н.А. Разработка интеллектуальных систем на базе нечёткой логики в FuzzyTech (методические указания к лабораторной работе). Владивосток: МГУ им. адм. Г.И. Невельского, 2012. – 56 с.

~ V.A. Sedov, N.A. Sedova

~ **Visual range fuzzy-production model**

~ **Abstract.** The paper presents a model of fuzzy-production system, which determines the range of visibility above water. Defined list of input linguistic variables: snow, rain, fog, mist, haze, visibility horizon - for which the specified fuzzy sets of terms. The rules of fuzzy productions and principles of their formation also details in this paper.

УДК 517

С.М. Ситник

Воронежский институт МВД, Воронеж, Россия

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ ДИСКРЕТНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ**

Аннотация. В работе рассматривается набор преобразований, которые обобщают известное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Эти обобщения определяются при помощи группы перестановок комплексных корней из единицы. Различным перестановкам соответствуют различные новые ДПФ. На этом пути удаётся построить преобразования с лучшими по сравнению со стандартным ДПФ спектральными свойствами. Например, для размерности равной четырём, стандартное ДПФ имеет неполный кратный спектр, а большинство новых преобразований имеют простой спектр. Приводятся результаты расчётов параметров преобразований на компьютере, а также некоторые гипотезы об их спектральных свойствах. Кратко рассматриваются возможности применения введённых обобщённых преобразований Фурье, в том числе в криптографии.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, корни из единицы, спектр, собственные векторы, перестановочные матрицы, криптография.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из самых известных и полезных на практике математических инструментов. Это преобразование широко применяется, например, при проектировании и оптимизации различных автоматизированных систем, в электродинамике и оптике, теории кодирования и криптографии, при анализе систем связи и фильтрации сигналов, в алгоритмах сжатия информации и вычислительной томографии.

Важность ДПФ для приложений определяется в том числе и тем, что задачи о вычислении ДПФ, циклической свертки последовательностей,

произведения больших чисел или многочленов по существу эквивалентны. Фундаментальное значение также имеют быстрые алгоритмы ДПФ, в которых число необходимых операций уменьшено по сравнению с обычным бесхитростным вычислением за счёт изощрённой оптимизации порядка выполнения действий. Наиболее известны быстрые алгоритмы Гуда, Кули и Тьюки, Винограда, Рейдера [Блэйхут, 1989; Ноден и др, 1999; Нуссбаумер, 1985]. Фундаментальную роль ДПФ играет в современной криптографии [Черемушкин, 2002].

ДПФ определяется матрицей F_n размером $n \times n$ с элементами

$$f_{kj} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(-i \frac{2\pi kj}{n}), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Таким образом, матрица ДПФ без учёта нормирующего множителя устроена так: первые строка и столбец состоят из единиц, во второй строке стоят корни из единицы порядка n в естественном порядке, следующие строки являются последовательными степенями второй строки. С точностью до множителя это степенная матрица, или матрица Вандермонда.

Так, например, при $n = 3$ и $n = 4$ матрицы ДПФ имеют вид

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}, \quad F_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Несмотря на общеизвестность преобразования ДПФ, некоторые стандартные задачи для него имеют незнакомые широкому кругу специалистов свойства. Рассмотрим в качестве примера естественную задачу о нахождении спектра ДПФ при любом n . Решение этой задачи отсутствует в основной литературе по преобразованиям Фурье и нетривиально. Известно, что четвертая степень ДПФ есть тождественное преобразование, поэтому собственными значениями могут быть лишь числа ± 1 , $\pm i$. Основная сложность состоит в вычислении кратностей этих собственных значений. Аналогия с непрерывным преобразованием Фурье, для которого четыре этих значения совершенно равноправны, приводит к весьма правдоподобному предположению, что хотя бы в случае размерности $n = 4m$ собственные значения ДПФ также равноправны, и, следовательно, все имеют кратность m .

Однако вычисления уже при $n = 4$ опровергают это предположение. В этом случае значения -1 , $-i$ являются простыми, значение 1 имеет кратность 2 , а значение i вообще отсутствует в спектре! Всё это нарушает симметрию спектра, присущую непрерывному случаю.

Приведем таблицу кратностей собственных значений матрицы ДПФ для начальных значений размерности n .

Таблица 1. Кратности собственных значений матриц ДПФ.

n	l	i	$-l$	$-i$
2	1	0	1	0
3	1	1+	1	0
4	2	0	1	1+
5	2	1+	1	1
6	2	1	2+	1
7	2	1	2	2+
8	3+	1	2	2
9	3	2+	2	2
10	3	2	3+	2
n	l	i	$-l$	$-i$
11	3	2	3	3+
12	4+	2	3	3
13	4	3+	3	3
14	4	3	4+	3
15	4	3	4	4+
16	5+	3	4	4
17	5	4+	4	4
18	5	4	5+	4
19	5	4	5	5+
20	6+	4	5	5

Из таблицы видно, что если отбросить начальные размерности $n=2$ и $n=3$, то несимметричность спектра проявляется при $n=4$, а затем при переходе к следующей размерности кратность одного из четырёх собственных значений увеличивается на единицу. Мы отметили в таблице соответствующие приращения размерностей знаками “+” и выделили жирным шрифтом, закономерность появления этих приращений простая: они добавляются циклически обходом четырёх корней против часовой стрелки.

Окончательные значения кратностей точек спектра приведены в следующей таблице.

Таблица 2. Общие формулы И. Шура для кратностей собственных значений.

n	1	i	-1	$-i$
$4N$	$N+1 (+)$	$N-1$	N	N
$4N+1$	$N+1$	$N (+)$	N	N
$4N+2$	$N+1$	N	$N+1 (+)$	N
$4N+3$	$N+1$	N	$N+1$	$N+1 (+)$

Данный результат был для произвольного значения n доказан знаменитым математиком Исаем Шуром (I. Schur) в 1921 году [Schur, 1921], результат несколько раз переоткрывался и стал фольклорным. (Отметим, что в одной замечательной книге, знаменитой множеством нестандартных фактов и заключений, Исая Шур назван белорусским математиком, он действительно родился в Бобруйске). Основным моментом при доказательстве неожиданно является тот факт, что для нахождения указанных кратностей необходимо вычисление знаменитых квадратичных тригонометрических сумм Гаусса [Berndt et al, 1998], которые являются следами матриц ДПФ. Нахождение точной формулы для квадратичных тригонометрических сумм заняло у Гаусса около 10 (!) лет с 1801 по 1811, сам он написал об этой задаче, “что решение многих трудных вопросов теории чисел не отняло столько дней, сколько взяло лет работы решение вопроса об этом” [Гаусс, 1959]. Для сравнения, теория гипергеометрических функций была создана Гауссом за несколько месяцев, что прослеживается по его подробным дневникам.

Данная работа возникла из наблюдения, что матрица ДПФ составляется нами по очевидному простейшему геометрическому способу: при формировании строк и столбцов корни из единицы обходятся по часовой стрелке. Например, при $n=4$ порядок такой: $1, -i, -1, i$. Очевидно, что данный способ упорядочивания корней достаточно случаен и может быть изменён. Поэтому логически равновозможны и все другие способы упорядочивания множества корней, при этом возникает целый набор различных новых модифицированных дискретных преобразований Фурье, см. [Ситник 2006а; 2006б; 2007].

Определение. Рассмотрим множество корней степени n из единицы, упорядоченное произвольным способом $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Назовём модифицированным дискретным преобразованием Фурье (МДПФ), построенным по данной перестановке r множества корней из единицы, оператор с матрицей размеров $n \times n$ следующего вида

$$F_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в результате получается с точностью до множителя некоторая степенная матрица (Вандермонда). Всего при данном n получится $n!$ различных модифицированных преобразований. Обычное классическое ДПФ и его обратное также входят в этот набор, остальные являются новыми. Так при $n=4$ получаются 24 различных МДПФ, при $n=5$ получаются 120 преобразований.

Целью работы является изучение спектральных свойств указанных новых модифицированных преобразований Фурье. В частности, представляют особый интерес преобразования при $n=4m$ с симметричным спектром (а при $n=4$ ещё и с простым), в котором все собственные значения имеют одинаковые кратности. Это не выполняется для обычных ДПФ ни при каких размерностях, как следует из приведённой выше таблицы 2. Такие преобразования с симметричным спектром являются в определённом смысле более естественными, чем обычное ДПФ, так как они ближе к своему непрерывному аналогу в плане равноправности точек спектра. Не исключено, что такие МДПФ за счёт более простых спектральных свойств могут оказаться полезнее в различных вычислительных приложениях.

Далее приводятся результаты расчётов на компьютере для случая $n=4$. Получившиеся 24 МДПФ разбиты нами на группы из похожих по своим свойствам преобразований. Мы указываем номер соответствующего преобразования, образующую его перестановку корней и для каждой группы кратко перечисляем основные особенности на примере первого преобразования из данной группы.

1. $r = \{1, -i, -1, i\}$ - это обычное ДПФ!
2. $r = \{1, i, -1, -i\}$ - это его обратное.

Квадрат преобразования с номером 1 является действительной матрицей перестановок

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр кратный $\{-1, -i, 1, 1\}$, характеристический полином получен в явном виде: $x^4 - (1-i)x^3 - (1+i)x^2 + (1-i)x + i$.

Найден также в явном виде набор действительных собственных векторов:

$\{-1,1,1,1\}, \{0,-1,0,1\}, \{2,1,0,1\}, \{1,0,1,0\}$.

3. $r = \{-1, i, 1, -i\}$, 4. $r = \{-1, -i, 1, i\}$.

Квадрат преобразования с номером 3 имеет вид

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

спектр кратный $\{i, i, -i, 1\}$, характеристический полином получен в явном виде:

$$x^4 - (1+i)x^3 + (1+i)x^2 - (1+i)x + i.$$

Найден также в явном виде набор комплексных собственных векторов:

$\{0,-1,0,1\}, \{-1,-2i,1,0\}, \{i,1,-i,1\}, \{1,0,1,0\}$.

В случаях 1-4 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причём нумерация начинается не с первообразных корней $-1,1$. Четвёртая степень преобразования есть единичная матрица. Построено явно диагонализующее преобразование.

5. $r = \{i,1,-i,-1\}$, 6. $r = \{-i,1,i,-1\}$, 7. $r = \{i,-1,-i,1\}$, 8. $r = \{-i,-1,i,1\}$.

В случаях 5-8 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причём нумерация начинается с первообразных корней $-i,i$.

Степени преобразования с номером 5 имеют вид:

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad F_r^4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad F_r^{16} = E.$$

Отметим, что F_r^2 напоминает матрицы спинорных представлений, а её ненулевые блоки – матрицы Паули [Дубровин и др, 1986].

Это МДПФ имеет простой спектр, состоящий из значений $\sqrt[4]{i}$!!!

Характеристический полином получен в явном виде: $x^4 - i$. С этого момента начинаются вычислительные затруднения у пакета МАТНЕМАТИСА, он не смог посчитать по одной компоненте каждого из собственных векторов по своему алгоритму. Например, первому собственному значению соответствует такой собственный вектор

$$\left\{s, (1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}})i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, 1\right\},$$

где s является первым по нумерации пакета МАТНЕМАТИСА корнем возвратного уравнения восьмой степени

$$s^8 - 8s^7 + 32s^6 - 24s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 32s^2 + 8s + 1 = 0.$$

9. $r = \{1,-1,i,-i\}$, 10. $r = \{1,-1,-i,i\}$, 11. $r = \{1,i,-i,-1\}$, 12. $r = \{1,-i,i,-1\}$.

Это оставшиеся перестановки, начинающиеся с 1.

Квадрат преобразования с номером 9 является комплексной матрицей следующего вида

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично устроены другие чётные степени данной матрицы.

Это МДПФ имеет простой спектр.

$$\left\{ -\frac{\sqrt{7}+1}{4} - \frac{\sqrt{7}-1}{4}i, \frac{\sqrt{7}-1}{4} + \frac{\sqrt{7}+1}{4}i, -1, 1 \right\} !!!$$

Характеристический полином получен в явном виде:

$$x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)x^3 - (1+i)x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)x + i.$$

Найден в явном виде набор комплексных собственных векторов:

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}i((2+i)+\sqrt{7}), -\frac{1}{2}i((2-i)+\sqrt{7}), 1 \right\}, \left\{ 0, -\frac{1}{2}i((-2-i)+\sqrt{7}), \frac{1}{2}i((-2+i)+\sqrt{7}), 1 \right\}, \\ \{-1, 1, 1, 1\}, \{3, 1, 1, 1\}.$$

Осталось рассмотреть оставшиеся преобразования.

$$13. \quad r = \{i, 1, -1, -i\}, \quad 14. \quad r = \{-i, 1, -1, i\}, \quad 15. \quad r = \{-1, 1, i, -i\}, \quad 16. \\ r = \{-1, 1, -i, i\}, \\ 17. \quad r = \{i, -1, 1, -i\}, \quad 18. \quad r = \{-i, i, 1, -1\}, \quad 19. \quad r = \{-i, -1, 1, i\}, \quad 20. \quad r = \{i, -i, 1, -1\}, \\ 21. \quad r = \{i, -i, -1, 1\}, \quad 22. \quad r = \{-i, i, -1, 1\}, \quad 23. \quad r = \{-1, i, -i, 1\}, \quad 24. \\ r = \{-1, -i, i, 1\}.$$

Для первого из них с номером 13 квадрат преобразования является комплексной матрицей следующего вида

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Остальные степени состоят из заполненных матриц со всё более громоздкими элементами.

Эти МДПФ имеют простой спектр !!! Для преобразования с номером 13 спектр состоит из значения 1 и трёх занумерованных в определённом порядке корней уравнения

$$2s^6 - 2s^5 + 3s^4 - 2s^3 + 3s^2 - 2s + 2 = 0,$$

которые МАТНЕМАТИСА не сумела вычислить в явном виде (хотя это возможно, так как данное возвратное уравнение сводится к кубическому). Характеристический полином получен в явном виде:

$$x^4 - \left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)x^3 + (1+i)x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)x + i.$$

Собственный вектор один найден в явном виде $\{1,1,-1,1\}$, в трёх остальных по одной компоненте равны 1, остальные найдены в неявном виде как занумерованные в определённом порядке корни уравнений вида

$$s^6 + 2s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 25s^2 + 12s + 4 = 0, \quad s^3 - s^2 - 4s + 2 = 0.$$

Таким образом, получается довольно неожиданный результат, что *подавляющее большинство МДПФ при $n=4$ устроены проще стандартного, так как все они имеют простой спектр*. Из приведённых результатов вычислений следует, что лишь четыре преобразования имеют кратный спектр, как и классическое. Они отвечают случаям, когда в перестановке корни обходятся на единичной окружности по часовой стрелке или против неё, причём начиная не с первообразных корней. При этом, МДПФ, отвечающие обходу по окружности при старте с первообразных корней, по-видимому, обладают наиболее простыми спектральными свойствами.

При произвольных n доказана унитарность всех МДПФ. Следовательно, все их спектры лежат на единичной окружности, и получен явный вид обратных преобразований. Это несложно установить пользуясь тем, что все МДПФ являются произведениями обычного ДПФ и соответствующих матриц перестановок. Отметим, что некоторые частные случаи рассмотренных здесь матриц МДПФ известны и используются в современных быстрых алгоритмах Гуда и Рейдера [Блэйхут, 1989; Ноден и др, 1999; Нуссбаумер, 1985].

К сожалению, установить строго другие содержательные результаты о спектральных свойствах при произвольных n не удаётся ввиду сложности доказательств. При помощи компьютера для небольших n вычислены начальные степени преобразований, проекторы на собственные подпространства и резольвенты, различные стандартные алгебраические факторизации матриц. На основании анализа компьютерных вычислений представляется верной следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *При $n = 4m$ все размерности собственных подпространств не совпадают только для МДПФ, отвечающим циклическим круговым перестановкам, которые начинаются не с первообразных корней.*

Если эта гипотеза верна, то за стандартный ДПФ выбран самый неудачный вариант с точки зрения вопроса о простоте устройства спектра.

Гипотеза 2. Все МДПФ имеют базис из вещественных собственных векторов.

Заметим, что автору не известен общий критерий наличия вещественного базиса из собственных векторов у произвольной комплексной матрицы. Для обычного ДПФ способ построения такого базиса предложен в [Matveev, 2001], идея построения следующая. Пусть уже вычислены кратности всех собственных чисел и соответствующие проекторы на собственные подпространства, тогда собственные вектора можно получить по следующему элементарному алгоритму: выбрать стандартный базис (а в принципе – и любой другой), и подействовать на орты последовательно всеми проекторами нужное число раз с учётом кратности значений спектра. К сожалению, полного набора собственных векторов при произвольном выборе начального базиса может и не получиться. Для обычного ДПФ аккуратная реализация этого метода с подробными вычислениями и обсуждением трудностей содержится в [Абрамочкин, 2006]. Несколько другой подход предложен в [Минин и др, 2005].

Мы рассмотрели в работе варианты с перестановками корней, то есть столбцов матрицы обычного ДПФ. Можно рассмотреть дальнейшее обобщение, когда одновременно переставляются и строки, то есть мы отказываемся от того, чтобы МДПФ определялось степенной матрицей. Такие преобразования также являются унитарными и частично исследованы на компьютере. Их удобно использовать для анализа сигналов, в которых редкие ненулевые элементы разбросаны среди нулевых. Для таких сигналов ДПФ неустойчиво при вычислениях и обладает другими нежелательными свойствами. Тогда можно при помощи первой матрицы перестановки собрать все ненулевые элементы вместе, выполнить преобразование, а затем при помощи второй матрицы обратной перестановки восстановить первоначальный порядок следования элементов в массиве данных. Применение ДПФ к преобразованному сгруппированному сигналу является более предпочтительным и даёт ряд вычислительных преимуществ.

Введённые МДПФ позволяют также обобщить тригонометрические суммы Гаусса.

Определение. Обобщённой квадратичной суммой Гаусса называется след соответствующего МДПФ, то есть

$$G(P, Q, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{n} p(k)q(k)\right), P = (p(0), p(1), \dots, p(n-1)),$$

$$Q = (q(0), q(1), \dots, q(n-1)),$$

где P, Q – две произвольные перестановки множества чисел $(0, 1, \dots, n-1)$.

ОТКРЫТАЯ ПРОБЛЕМА. Вычислить в явном виде обобщённые квадратичные суммы Гаусса в терминах заданных перестановок P и Q , порождающих соответствующее МДПФ.

Автору представляется, что это чрезвычайно сложная задача, никаких даже приблизительных путей её решения в настоящее время не видно (с

такой оценкой согласился в частной переписке и один из авторов монографии [Berndt et al, 1998] Bruce Berndt). Тем не менее, решение сформулированной открытой проблемы позволило бы находить размерности собственных подпространств МДПФ при любых размерностях теоретически, без компьютера.

Представляет очевидный интерес изучение быстрых алгоритмов вычисления МДПФ по аналогии с обычным случаем.

Отметим, что ДПФ широко применяются в криптографии. На основе результатов настоящей работы можно в принципе предложить следующий алгоритм шифрования информации. Отправитель и получатель заранее знают, какой из вариантов МДПФ данного порядка используется при обмене, а противнику это не известно. Ввиду огромности числа $n!$ подобный алгоритм может быть не менее стойким, чем стандартные алгоритмы с большой длиной ключа. Кроме того, при данном методе требуется минимальная модификация существующих алгоритмов и программ, сводящаяся к простой замене одной матрицы на другую.

Кроме того, модифицированное преобразование Фурье и суммы Гаусса связаны с квадратичным или дробным преобразованием Фурье, которое находит применения в теории операторов преобразования [Катрахов и др, 1984; Ситник, 1990; 1991; Sitnik, 2012; 2013;] и методе квадратичной экспоненциальной аппроксимации сигналов [Журавлёв и др., 2009; 2010; Минин и др., 2009; Kiselev et al, 2013; Zhuravlev et al, 2011].

На модифицированные преобразования Фурье можно также обобщить матричное соотношение неопределённостей, связывающее количество нулевых компонент в исходном и преобразованном сигналах [Ситник, 2009; Sitnik, 2010].

Библиографический список

1. Абрамочкин Е.Г. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Интернет-ресурс: www.ega-math.narod.ru.
2. Блэйхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
3. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. М., Изд. АН СССР, 1959.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
5. Минин Л.А., Журавлев М.В., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009.- № 13 (68), Вып. 17/2.- С. 89--99.
6. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных.- 2010. - С. 107-116.
7. Катрахов В.В., Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Доклады Академии наук СССР.- 1984.- Т. 278, N4.- С. 797-799.

8. Акиндинова Е.В., Барсукова А.И., Минин Л.А. Дискретное преобразование Фурье и ортогональные системы циклических сдвигов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия "Физика, Математика".- 2005.- № 1. С. 145 – 148.
9. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета.- 2009.- № 13 (68), Выпуск 17/2.-С. 89-99.
10. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика. М.: Мир, 1999.
11. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свёрток. М.: Радио и связь, 1985.
12. Ситник С.М., Унитарность и ограниченность операторов Бушмана—Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт. Институт автоматки и процессов управления ДВО АН СССР.-1990.- 44 С.
13. Ситник С. М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи // ДАН СССР.-1991.-т. 320, №6.- С.1326-1330.
14. Ситник С.М. Модифицированное дискретное преобразование Фурье // Вестник Воронежского института МВД России.- 2006.- № 7.- С. 196 – 201.
15. Ситник С.М. Компьютерный анализ спектральных свойств модифицированных дискретных преобразований Фурье. // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.- 2007.- Т. 9, №1.- С. 98--103.
16. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств // Итоги науки. Южный федеральный округ. Серия "Математический форум". Том 3. Исследования по математическому анализу. Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. Владикавказ: Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО Алания.- 2009.-С. 221-266.
17. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. On Evaluation of Riesz Constants for Systems of Shifted Gaussians // arXiv:1308.2649.-2013.-62 P.
18. Matveev V.B. Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform // Inverse Problems.- 2001.- No. 17.- pp. 633 – 657.
19. Schur I. Uber die Gaussschen Summen // Nach. Gessel. Gottingen, Math-Phys Klasse.- 1921.- pp. 147 – 153.
20. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy--Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey // arXiv:1012.3864.-2010.-51 P.
21. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey // arXiv: 1012.37412012.- 2012.- 141 P.
22. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // In the book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: Amade 2012. / Dubatovskaya M.V., Rogosin S.V. (Eds.). Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2013. pp. 171-201.
23. Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., S. M. Sitnik. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer.- 2011, Vol. 173, № 2. - pp. 231-241.

УДК 621.395.7, 519.854

Е.С. Скаков, В.Н. Малыш

ФГБОУ ВПО Липецкий педагогический университет, Липецк, Россия.

МУРАВЬИНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МОЩНОСТИ

Аннотация. В статье предложена модификация муравьиного алгоритма для решения задачи размещения с ограничениями на мощности. Особенностью предлагаемого алгоритма является использование двух колоний муравьев и поэтапное решение задачи.

Ключевые слова: Простейшая задача размещения, задача размещения с ограничениями на мощности, муравьиный алгоритм, феромон, оптимизация.

Простейшая задача размещения. Задачи размещения – широкий пласт математических моделей исследования операций, интересный как с практической точки зрения, так и с точки зрения комбинаторной оптимизации [1]. Данный класс задач находит применение при решении проблем размещения предприятий, складов и магазинов, планировании метро, размещении узлов сетей связи, станций обслуживания и др. В качестве целевой функции, как правило, используются либо величина затрат на создание и функционирование системы технических средств, либо суммарная эффективность системы (например, объем выполняемых работ) [1].

Опишем простейшую задачу размещения. Имеется лицо, принимающее решение. Для заданного множества клиентов $J = \{1, \dots, n\}$ он знает производственно-транспортные расходы $c_{ij} > 0$, связанные с производством и доставкой продукции j -му клиенту из i -го пункта производства, если оно будет там открыто. Множество возможных пунктов производства (ВПП) $I = \{1, \dots, m\}$ предполагается конечным, и для каждого пункта $i \in I$ известна стоимость $f_i > 0$ открытия предприятия в этом пункте. Задача состоит в том, чтобы найти такое множество открываемых предприятий $S \subseteq I$, $S \neq \emptyset$, которое с минимальными затратами позволяет обслужить всех клиентов с минимальными суммарными затратами [2]. С использованием введенных обозначений оптимизационная постановка задачи может быть записана следующим образом:

$$F(S) = \left(\sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in S} c_{ij} \right) \rightarrow \min_{S \subseteq I}. \quad (1)$$

Первое слагаемое отражает затраты на открытие предприятий, второе определяет производственно-транспортные расходы.

Сформулированная задача известна как простейшая задача размещения производства. Она является обобщением известной задачи о покрытии множествами и, следовательно, относится к числу NP-трудных в сильном смысле [3, 4].

Задача размещения с ограничениями на мощности. Задача размещения с ограничениями на мощности предприятий является обобщением простейшей задачи размещения. В отличие от последней в ней предполагается, что каждое предприятие может производить продукцию только в ограниченных количествах [5]. Такое естественное и важное предположение меняет математическую модель и значительно усложняет методы решения оптимизационной задачи.

Приведем математическую постановку задачи в терминах целочисленного линейного программирования. В дополнение к обозначениям, приведенным в разделе «Простейшая задача размещения», обозначим через $V_i \geq 0$ максимально возможный объем производства в пункте i ($i = 1, \dots, m$). Пусть $p_{ij} \geq 0$ – объем продукции i -го предприятия, необходимый для удовлетворения потребностей j -го потребителя ($j = 1, \dots, n$) [5].

Введем переменные:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ открыто} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ обслуживает потребителя } j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

С использованием введенных обозначений оптимизационная постановка задачи может быть записана следующим образом:

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \right\}. \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J. \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \leq V_i y_i, \quad i \in I. \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Целевая функция имеет смысл суммарных затрат на открытие предприятий и обслуживание потребителей. Первое ограничение требует удовлетворения потребностей всех потребителей, причем одного потребителя может обслуживать только одно предприятие. Второе ограничение несет сразу две функции. Оно позволяет обслуживать потребителей только с открытых предприятий, а также ограничивает сверху возможные объемы поставок продукции с каждого предприятия [5].

Пояснение: в дальнейшем фраза типа « j -й клиент подключен к i -му ВПП» обозначает, что j -й клиент будет обслуживаться i -м предприятием.

Общие сведения о муравьином алгоритме. Муравьиный алгоритм (алгоритм оптимизации подражанием муравьиной колонии, англ. ant colony optimization, ACO) – один из наиболее эффективных метаэвристических методов, применяющихся для решения NP-трудных задач. Метод был предложен Dorigo в начале 90-х для решения задачи коммивояжёра (англ. travelling salesman problem, TSP). Суть подхода, лежащего в основе ACO, заключается в использовании модели поведения муравьёв, ищущих пути от колонии к источнику питания [6]. Муравьи используют для передачи информации т.н. стигмергию. Стигмергия — это разнесенный во времени тип взаимодействия, когда один субъект взаимодействия изменяет некоторую часть окружающей среды, а остальные используют информацию об ее состоянии позже, когда находятся в ее окрестности [7]. Биологически стигмергия реализуется через феромон — специальный секрет, откладываемый как след при перемещении муравья. Феромон — достаточно стойкое вещество, он может восприниматься муравьями несколько суток. Чем выше концентрация феромона на тропе, тем больше муравьев будет по ней двигаться. Со временем феромон испаряется, что позволяет муравьям адаптировать свое поведение под изменения внешней среды. Распределение феромона по пространству передвижения муравьев является своего рода динамически изменяемой глобальной памятью муравейника [8].

В методе ACO имитируется деятельность колонии искусственных муравьев. Муравьи взаимодействуют между собой для решения поставленной оптимизационной задачи посредством обмена информацией через феромон. Для решения задачи при помощи муравьиного алгоритма ее удобно представить в виде модели на графе. Например, в задаче коммивояжёра города представляют собой вершины графа, а рёбра (i, j) между вершинами i и j — пути сообщения между этими городами. С каждым ребром связан его феромонный уровень τ_{ij} и эвристическая функция η_{ij} (выражает желание посетить город j из города i), обратно пропорциональная длине пути между городами i и j . Выбор компонента решения (в случае TSP – ребер графа) из множества допустимых компонент осуществляется вероятностно на каждом шаге построения решения, исходя из значений феромонного уровня и эвристической функции ребер графа [9].

Одна итерация алгоритма подразумевает построение каждым из b муравьев колонии одного допустимого решения задачи. Феромонный уровень компонентов периодически обновляется согласно следующему правилу: феромон ребра получает приращение, пропорциональное качеству (в случае минимизационной задачи качество обратно пропорционально значению целевой функции) решения, в которое это ребро входит.

Существует множество разновидностей АСО. В данной работе для решения задачи размещения БС предлагается метод Ant Colony System (ACS).

Муравьиный алгоритм для решения задачи размещения. Мы предлагаем модификацию АСО, отличительной особенностью которой является использование двух колоний (а не одной, как в классическом алгоритме) искусственных муравьев. Подобный подход использовался в работе [10], однако в ней решается другая NP-трудная задача (capacitated location routing problem).

Необходимость использования двух колоний муравьев обусловлена следующими соображениями. Как уже было сказано ранее, для возможности применения АСО необходимо обеспечить представление задачи в виде графа. В задаче размещения с ограничениями на мощности множество вершин V_1 будет соответствовать возможным пунктам производства, множество вершин V_2 будет представлять клиентов, а множество ребер E будет ассоциировано с расстояниями, связывающими ВПП и клиентов между собой. Таким образом, граф, на котором будет конструироваться решение задачи, состоит из множества вершин двух типов, и множества ребер, соединяющих вершины разных типов между собой. При этом ВПП между собой не соединены ребрами, точно также как и между клиентами отсутствуют ребра.

Решение задачи будет итаться в два этапа. Первая колония отвечает за выбор мест для открытия предприятия. Пусть τ_1 – одномерный массив, каждый его элемент $\tau_1[i]$ хранит уровень феромона для пары i -го ВПП. Определим эвристическую функцию для первой колонии. Значение эвристической функции некоторой компоненты должно быть пропорционально «желанию» выбрать эту компоненту исходя из её свойств. Для каждой компоненты решения мы можем посчитать $\eta_1[i]$ заранее, т.к. значение эвристической функции (в отличие от феромона) не меняется в процессе работы алгоритма. Для нашей задачи эвристическая функция ВПП обратно пропорциональна стоимости открытия на нем предприятия:

$$\eta_1[i] = 1/f_i. \quad (7)$$

Вторая колония отвечает за соотношение клиентов и выбранных ранее предприятий. Пусть τ_2 – двумерный массив, каждый его элемент $\tau_2[i][j]$ хранит уровень феромона ребра, соединяющего j -го клиента с i -м предприятием. Определим эвристическую функцию для второй колонии:

$$\eta_2[i][j] = 1/c_{ij}. \quad (8)$$

Таким образом, две колонии строят решение из разных типов компонентов. Для 1-й колонии компонентами решения являются возможные пункты производства. Для 2-й колонии компонентами решения являются связи между выбранными предприятиями и клиентами.

Выбор пунктов производства. В действительности, первая колония муравьев не формирует множество используемых пунктов производства, а лишь ранжирует их в порядке убывания «желанности». Муравей из второй колонии будет поступать с проранжированными ВПП следующим образом: сначала клиенты будут подключаться к первому пункту, пока не перестанет выполняться ограничение (6), потом по той же схеме ко второму и т.д.; работа муравья из второй колонии закончится тогда, когда все клиенты будут подключены к своим пунктам. Соответственно, в результирующее множество выбранных предприятий войдут только те предприятия, к которым подключен хотя бы один клиент.

Ранжирование ВПП происходит следующим образом. Муравей h из 1-й колонии последовательно должен m раз выполнить следующие шаги. Из множества O^h еще непроранжированных ВПП выбрать самый «желанный» пункт, пусть его номер i . Выбор ВПП i для метода ACS происходит согласно формулам (9) и (10). P_i^h – вероятность того, что h -й муравей выберет i -й пункт производства из множества O^h еще непроранжированных этим муравьем ВПП. α_1 – параметр, определяющий относительную значимость феромонного уровня ВПП; β_1 – параметр, определяющий относительную значимость эвристической функции η_1 . q^1 – случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0; 1]$, q_0^1 – коэффициент исследования для 1-й колонии.

$$i = \begin{cases} \arg \max_{i \in O^h} ((\tau_1[i])^{\alpha_1} (\eta_1[i])^{\beta_1}), & \text{если } q^1 \leq q_0^1. \\ I, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

$$I: P_i^h = \frac{(\tau_1[i])^{\alpha_1} (\eta_1[i])^{\beta_1}}{\sum_{s \in O^h} (\tau_1[s])^{\alpha_1} (\eta_1[s])^{\beta_1}}. \quad (10)$$

Подключение клиентов. Выбор подключаемого клиента для метода ACS происходит согласно формулам (11) и (12). P_{ij}^h – вероятность того, что h -й муравей выберет j -й клиент из множества W^h клиентов, которые еще не имеют своих предприятий, для подключения к i -му ВПП.

α_2 – параметр, определяющий относительную значимость феромонного уровня ребер, соединяющих ВПП с клиентом; β_2 – параметр, определяющий относительную значимость эвристической функции η_2 . q^2 – случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0; 1]$, q_0^2 – коэффициент исследования для 1-й колонии.

ВПП перебираются в том порядке, в котором их выбрал муравей из 1-й колонии: клиенты подключаются к первому пункту, пока не перестанет выполняться ограничение (6), затем к следующему и т.д., до тех пор пока множество W^h не станет пустым.

$$J = \begin{cases} \arg \max_{j \in O^h} ((\tau_2[i][j])^{\alpha_2} (\eta_2[i][j])^{\beta_2}), & \text{если } q^2 \leq q_0^2. \\ J, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11)$$

$$J: P_{ij}^h = \frac{(\tau_1[i][j])^{\alpha_1} (\eta_1[i][j])^{\beta_1}}{\sum_{z \in W^h} (\tau_1[i][z])^{\alpha_1} (\eta_1[i][z])^{\beta_1}}. \quad (12)$$

Таким образом, одно решение получается в результате последовательной работы сначала h -го муравья 1-й колонии, а затем h -го муравья второй колонии.

Обновление феромонного уровня. Цель, которую преследует феромонное обновление, состоит в повышении уровня феромонных значений, связанных с хорошими или многообещающими решениями, и в понижении величин феромонных значений, связанных с плохими решениями.

Метод ACS предусматривает 2 типа феромонного обновления: глобальное и локальное. Глобальное обновление происходит в конце каждой итерации муравьиного алгоритма, когда все b муравьев обеих колоний закончили свою работу и мы имеем b готовых решений.

Для первой колонии:

$$\tau_1[i] = \begin{cases} (1 - \rho_1)\tau_1[i] + \rho_1\Delta\tau^{best}, & \text{если } i - \text{й ВПП используется в лучшем решении} \\ \tau_1[i], & \text{иначе,} \end{cases} \quad (13)$$

где ρ_1 – скорость испарения феромонного следа муравьев 1-й колонии. Пусть F_{best} – значение целевой функции лучшего решения на данной итерации, тогда приращение феромонного уровня можно найти по формуле:

$$\Delta\tau^{best} = 1/F_{best}. \quad (14)$$

Для второй колонии:

$$\tau_2[i][j] = \begin{cases} (1 - \rho_2)\tau_2[i][j] + \rho_2\Delta\tau^{best}, & \text{если ребро}(i, j) \text{ используется в лучшем решении} \\ \tau_2[i][j], & \text{иначе} \end{cases} \quad (15)$$

где ρ_2 – скорость испарения феромонного следа муравьев 2-й колонии.

В методе ACS помимо глобального обновления феромона происходит т.н. локальное обновление. Оно происходит не в конце каждой итерации: как только h -й муравей построил решение, он обновляет локальный уровень феромона:

$$\tau_1[i] = (1 - \varphi_1)\tau_1[i] + \varphi_1\tau_{10}, \quad (16)$$

$$\tau_2[i][j] = (1 - \varphi_2)\tau_2[i][j] + \varphi_2\tau_{20}, \quad (17)$$

где φ_1 и φ_2 – коэффициент затухания феромона соответственно для 1-й и 2-й колонии; τ_{10} и τ_{20} – начальные значения феромонного уровня соответственно для 1-й и 2-й колонии.

Локальное обновление ставит своей целью расширение пространства поиска последующими муравьями на данной итерации за счёт уменьшения феромонного уровня компонент, которые уже были использованы h -м муравьем.

Псевдо-код алгоритма. Ниже представлена общая схема муравьиного алгоритма для решения задачи размещения с ограничениями на мощности:

1. Инициализация параметров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2, b$.
2. Расчет массивов η_1, η_2 . Инициализация массивов τ_1, τ_2 .
3. Введем обозначения: Sol_{glob} – лучшее известное решение задачи, C_{glob} – стоимость Sol_{glob} , Sol_{iter} – лучшее решение задачи на данной итерации алгоритма, C_{iter} – стоимость Sol_{iter} .
4. $C_{glob} = \infty$.
5. $C_{iter} = \infty$.
6. Цикл по количеству муравьев (for $h=1$ to b). Повторяем шаги 7–10.
7. Выбор ВПП h -м муравьем 1-й колонии.
8. Подключение клиентов к предприятиям h -м муравьем 2-й колонии (получается решение Sol_h).
9. Локальное обновление феромона.
10. Если $C_{iter} > F(Sol_h)$, то $Sol_{iter} = Sol_h, C_{iter} = F(Sol_h)$.
11. Конец цикла по количеству муравьев.
12. Если $C_{glob} > F(Sol_{iter})$, то $Sol_{glob} = Sol_{iter}, C_{glob} = F(Sol_{iter})$.
13. Глобальное обновление феромона.
14. Если время работы алгоритма не истекло, то переход к пункту 5.
15. Вернем Sol_{glob} в качестве решения задачи.

Библиографический список

1. Кочетов, Ю. А. Двухуровневые задачи размещения / Ю. А. Кочетов // Труды ИВМ и МГ СО РАН, Серия: Информатика. — 2007. — № 7. — С. 97–104.
2. Простейшая задача размещения [Электронный документ]. — Режим доступа: <http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/UFLP/uflp.html>.
3. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. — М.: Мир, 1982.—419 с.
4. Korte, В. Combinatorial optimization. Theory and algorithms / В. Korte, J. Vygen. — Springer, 2005.—595 с.
5. Задача размещения с ограничениями на мощности [Электронный документ]. — Режим доступа: <http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/CFLP/cflp.html>.
6. Dorigo, М. Ant colony optimization / М. Dorigo, М. Birattari, Т. Stutzle // Computational Intelligence Magazine. — 2006. — Т. 1. — № 4. — С. 28–39.

7. Dreco, J. *Metaheuristics for Hard Optimization* / J. Dreco, A. Petrowski, E. Taillard. — Springer, 2006.—382 c.
8. Luke, S. *Essentials of Metaheuristics* / S. Luke. — Lulu, 2013.—242 c.
9. Dorigo, M. Ant colonies for the travelling salesman problem / M. Dorigo, L. M. Gambardella // *BioSystems*. — 1997. — T. 43. — № 2. — C. 73–81.
10. Ting, C. J. A multiple ant colony optimization algorithm for the capacitated location routing problem / C. J. Ting, C. H. Chen // *International Journal of Production Economics*. — 2013. — T. 141. — № 1. — C. 34–44.

~ E.S. Skakov, V.N. Malysh

~ **Ant colony optimization algorithm for the capacitated facility location problem**

~ **Abstract.** In this article we provide a modified ant colony optimization algorithm for solving the capacitated facility location problem. The feature of the proposed algorithm is the use of two colonies of ants and phased solution of the problem.

~ **Keywords:** simple facility location problem, capacitated facility location problem, ant colony optimization algorithm, pheromone, optimization.

УДК 004.5

Сон Лам Нгуен*, О.Я.Кравец**

* -Технологический университет, г. Хо Ши Мин, Вьетнам

** - Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМАТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ ЧИСЛА МИНИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ЗАПРОСА

Аннотация. Рассмотрены особенности применения схематического представления данных для упрощения и сокращения числа минимальных планов запроса.

Ключевые слова: Базы данных, реляционные запросы, оптимизация

1. Введение

Вероятностный вывод применительно к большим пакетам данных становится центральной проблемой управления данными. Центральная проблема состоит в том, что точный вывод обычно является NP-полной задачей, что ограничивает размер данных, которые могут быть эффективно обработаны. Настоящая статья продолжает исследования, проведенные в [2, 3]. С целью сохранения преемственности нумерация продолжается.

2. Оптимизация с использованием схематического представления

Исследуем, как применять схематическое представление для упрощения и сокращения числа минимальных планов запроса. Рассмотрим детерминированные отношения (т.е. отношения со всем кортежем, имеющим вероятности 1), и функциональные зависимости (например, ключи). Будем использовать следующий рабочий пример.

Пример 25 (Рабочий пример). Рассмотрим запрос q :

$$q: -R(x, z), S(y, u), T(z), U(u), M(x, y, z, u)$$

Цель заключается в оценке всех минимальных планов, возвращенных **Алгоритмом 1** [2], затем найти минимальный показатель. Рис. 9 показывает матрицу инцидентий запроса q вместе с шестью минимальными планами.

2.1. Детерминированные отношения

Обозначим детерминированные таблицы показателем степени, т.е. таблица R является вероятностной, а таблица R^d – детерминированной. Назовем переменные-разделители запроса q набором существующих переменных, которые появляются во всех вероятностных подцелях и обозначим их как $SVar(q)$.

Лемма 26 (Диссоциация детерминированных таблиц). Диссоциация детерминированной таблицы в запросе q на любой переменной не влияет на надежность запроса: $r(q^\Delta) = r(q)$.

Далее каждый раз, когда будем разъединять детерминированное отношение, будем отмечать диссоциированные переменные в матрице инцидентий звездочкой (*) вместо жирной точки (•), чтобы подчеркнуть, что эта диссоциация не изменяет надежность запроса. **Лемма 26** предполагает, можно диссоциировать все детерминированные отношения, затем применить стандартный алгоритм, чтобы найти множество минимальных планов запроса. Однако это не верно - это контрпример:

	x	z	y	u
M	○	○	○	○
R	○	○		
T		○		
S			○	○
U				○

	x	z	y	u
M	○	○	○	○
R	○	○	●	●
T		○	●	●
S			○	○
U				○

(a) q
(b) q^Δ

$$\rho(q) = \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), M(x,y,z,u)]]]]] \\ \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), M(x,y,z,u)]]]]] \\ \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), M(x,y,z,u)]]]]] \\ \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), M(x,y,z,u)]]]]] \\ \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), M(x,y,z,u)]]]]] \\ \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), M(x,y,z,u)]]]]] \end{array} \right]$$

Рис. 9. Пример 25. Матрица инцидентий (a) для примера

$q: -R(x,z), S(y,u), T(z), U(u), M(x,y,z,u)$ вместе с матрицей (b) минимальной безопасной диссоциацией. (c): все 6 минимальных планов запроса сгенерированных алгоритмом 1. Коэффициент распространения является минимум показателей всех планов

Пример 27 (Некорректная детерминированная диссоциация). Рассмотрим запрос $q: -R(x), S(x,y), T^d(y,z), U(z)$ с детерминированным отношением T^d через базу данных D (рис. 10а). Строчные буквы с индексами обозначают кортежи в соответствующих отношениях, т.е. r_1 относится к кортежу $R(a)$. Линейная передача запроса q равна $\text{Lin}(q) = r_1 s_1 t_1 u_1 \vee r_1 s_1 t_2 u_2 \vee r_2 s_2 t_1 u_1 \vee r_2 s_2 t_2 u_2$. Заменив t_1 и t_2 на 1, получим разложение $\text{Lin}(q) = ((r_1 s_1) \vee (r_2 s_2))(u_1 \vee u_2)$. Предполагая, что все недетерминированные кортежи имеют ту же самую вероятность, равную 0,5,

надежность запроса становится равной $\mathbb{P}[q] = 21/64 \approx 0.328$. Запрос q имеет три главных множества $\text{TopSets}(q) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ (рис. 10b). Диссоциация q на y (рис. 10c) приводит к безопасной диссоциации q^{Δ_1} , которая на определенном экземпляре базы данных D имеет то же самое выражение линейной передачи, как и оригинальный запрос: $\text{Lin}(q^{\Delta_1}) = \text{Lin}(q)$. Так как это безопасная диссоциация, существует план $P(q^{\Delta_1})$, который вычисляет надежность q^{Δ_1} и ее коэффициент будет совпадать с надежностью оригинального запроса $\text{score}(P(q^{\Delta_1})) = r(q) \approx 0,328$. Однако, если бы мы сначала диссоциировали детерминированное отношение T^d в $\tilde{T}^d(\tilde{x}, y, z)$ (q^{Δ_2} на рис. 10d), мы бы получили диссоциированный запрос q^{Δ_2} , который является небезопасным, несмотря на наличие той же самой надежности, что и у оригинального плана $r(q^{\Delta_2}) = r(q)$. Таким образом, чтобы вычислить его коэффициент распространения, необходимо найти минимальную надежность запроса по всем безопасным диссоциациям q^{Δ_2} , каждая из которых требует еще, по крайней мере, две диссоциации. Это увеличивает коэффициент распространения до $\rho(q^{\Delta_2}) = 87/256 \approx 0.340 > 0.328 \approx \rho(q^{\Delta_1}) = r(q)$.

R	A	S	A	B	T^d	B	C	U	C
r_1	a	s_1	a	c	t_1	c	e	u_1	e
r_2	b	s_2	b	c	t_2	c	f	u_2	f

(a) D

R	x	y	z	R	x	y	z	R	x	y	z
S	\circ	\circ	\circ	S	\circ	\bullet	\circ	S	\circ	\circ	\circ
U	\circ	\circ	\circ	U	\circ	\bullet	\circ	U	\circ	\circ	\circ
T^d	\circ	\circ	\circ	T^d	\circ	\circ	\circ	T^d	\star	\circ	\circ

(b) q (c) q^{Δ_1} (d) q^{Δ_2}

Рис. 10. Пример 27

Лемма 28 (Переменные-разделители). Если q связан своими существующими переменными и $x \in \text{SVar}(q)$, то все минимальные планы запроса имеют x как основную переменную.

Лемма 28 дает **Алгоритм 2**, который расширяет **Алгоритм 1** строками 8-16: каждый раз, когда получаем переменные-разделители z на проекции, проверяем, не диссоциируют ли они запрос (строка 10). Если они не диссоциируют запрос (строка 13), тогда повторяем цикл по всем минимальным множествам переменных, которые включают z (т.е. $z \cup y$) и которые диссоциируют запрос.

Алгоритм 2 генерирует все минимальные планы запроса для запроса q с детерминированными отношениями. Строки 8-16 расширяют **Алгоритм 1**.

```

Recursive algorithm: DP (PlansWithDeterministicTables)
Input: Query  $q(x) :- R_1(x_1), \dots, R_m(x_m)$ 
          Schema information on deterministic relations
Output: Set of all minimal query plans  $\mathcal{P}$ 
1  if  $m = 1$  then  $\mathcal{P} \leftarrow \{\pi_x^p R_i(x_i)\}$  else
2  |   Set  $\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$ 
3  |   if  $q$  is disconnected then
4  |   |   Let  $q = q_1, \dots, q_k$  be the components connected by  $\text{EVar}(q)$ 
5  |   |   foreach  $q_i$  do Let  $\text{HVar}(q_i) \leftarrow \text{HVar}(q) \cap \text{Var}(q_i)$  foreach
6  |   |   |    $(P_1, \dots, P_k) \in \text{DP}(q_1) \times \dots \times \text{DP}(q_k)$  do
7  |   |   |   |    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\bowtie^p [P_1, \dots, P_k]\}$ 
8  |   |   else
9  |   |   |   if there are separator variables  $z = \text{SVar}(q) \neq \emptyset$  then
10 |   |   |   |   Let  $q' \leftarrow q$  with  $\text{HVar}(q') \leftarrow \text{HVar}(q) \cup z$ 
11 |   |   |   |   |   if  $q'$  is disconnected then
12 |   |   |   |   |   |   foreach  $P \in \text{DP}(q')$  do  $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\pi_{-z}^p P\}$ 
13 |   |   |   |   |   else
14 |   |   |   |   |   |   foreach  $y \in \text{TopSets}(q')$  do
15 |   |   |   |   |   |   |   Let  $q'' \leftarrow q$  with  $\text{HVar}(q'') \leftarrow \text{HVar}(q) \cup z \cup y$ 
16 |   |   |   |   |   |   |   |   foreach  $P \in \text{DP}(q'')$  do  $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\pi_{-(z \cup y)}^p P\}$ 
17 |   |   |   |   |   else
18 |   |   |   |   |   |   foreach  $y \in \text{TopSets}(q)$  do
19 |   |   |   |   |   |   |   Let  $q' \leftarrow q$  with  $\text{HVar}(q') \leftarrow \text{HVar}(q) \cup y$ 
20 |   |   |   |   |   |   |   |   foreach  $P \in \text{DP}(q')$  do  $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\pi_{-y}^p P\}$ 

```

Теорема 29 (Алгоритм 2). Алгоритм 2 возвращает содержание и полное перечисление минимальных планов запроса при наличии детерминированных отношений.

Если запрос безопасен, алгоритм будет производить один единственный план запроса. Если все отношения детерминированы, то единственный минимальный план запроса будет состоять из одного мульти-соединения между всеми отношениями, сопровождаемыми единственной проекцией: $\pi_x \bowtie [R(x_i), \dots, R(x_m)]$. Таким образом, передача в SQL является одним единственным стандартным детерминированным SQL-запросом, и оптимизатор запросов не имеет ограничений при определении оптимального порядка соединения между отношениями. Поэтому **Алгоритм 2** умеренно расширяет детерминированные SQL запросы до вероятностных запросов, в

которых детерминированные запросы полностью оцениваются таким же образом.

Пример 30 (Продолжение рабочего примера). Предположим, что отношения R и T из **Примера 25** являются детерминированными: тогда Алгоритм 2 возвращает один единственный минимальный план (рис. 11с), который подразумевает, что запрос безопасен и план возвращает точные вероятности.

	x	z	y	u
M	○	○	○	○
R^d	○	○		
T^d		○		
S			○	○
U				○

(a) q_d

	x	z	y	u
M	○	○	○	○
R^d	○	○	★	★
T^d	★	○	★	★
S			○	○
U				○

(b) q'_d

$$\rho(q_d) = \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y, u), \pi_{-x,z}^p \bowtie^p [T^d(z), R^d(x, z), M(x, y, z, u)]]]$$

(c)

Рис. 11. **Пример 30:** знание того, что отношения R^d и T^d в **Примере 25** детерминированы, позволяет нам селективно разобщать и таким образом сокращать количество минимальных планов. В этом случае q'_d становится иерархической. Таким образом, **Алгоритм 2** возвращает один единственный минимальный план и $\rho(q_d) = r(q_d)$

На практике детерминированные отношения не имеют вероятностного признака, который упрощает вычисления. Рассмотрим подплан $P = \bowtie^p [T^d(z), R^d(x, z), M(x, y, z, u)]$ на рис. 11с. Этот подзапрос определяется как соединение со стандартной семантикой $T(x, y, z, u, p) :- T(z), R(x, z), M(x, y, z, u, p)$ по входным отношениям с признаком вероятности p .

5.2. Функциональные зависимости (ФЗ)

Функциональные зависимости, такие как ключи, могут также сократить количество минимальных безопасных диссоциаций и таким образом упростить получаемые планы запроса.

Лемма 31 (Диссоциация и надежность функциональных зависимостей). Пусть определен запрос q с функциональной зависимостью $\Gamma : \mathbf{x} \rightarrow y$ на отношении R_i , и на другом отношении R_j с $\mathbf{x} \subseteq \text{Var}(R_j)$, но $y \notin \text{Var}(R_j)$. Тогда диссоциация R_j по y не меняет надежность запроса.

Это лемма похожа на **Лемму 26**; будем обозначать в матрице инцидентий переменные, которые диссоциированы в результате функциональных зависимостей звездочкой (★) вместо жирной точки (●).

Лемма 32 (Диссоциации и иерархии ФЗ). Рассмотрим безопасный запрос q и ФЗ $\Gamma : \mathbf{x} \rightarrow y$. Диссоциация всех отношений R_j с $\mathbf{x} \subseteq \text{Var}(R_j)$ по всем зависимым переменным $y \setminus \text{Var}(R_j)$ приводит к безопасной диссоциации.

Эта лемма не имеет аналогий с детерминированными отношениями. Вспомним **Пример 27** и рис. 10с, которые показывали, что диссоциация всех детерминированных таблиц в безопасной диссоциации q^{A_1} приводит к небезопасной диссоциации. Однако с ФЗ $\Gamma : \mathbf{x} \rightarrow y$ можно диссоциировать зависимые переменные y во всех отношениях, которые содержат переменную x , а затем применить предыдущий алгоритм.

Пример 33. (Неверная диссоциация ФЗ). Рассмотрим запрос $q: -R(x, y, z), S(x), T(x, z)$ с ФЗ $\Gamma : \mathbf{x} \rightarrow y$, содержащейся в отношении R . Запрос безопасен (иерархия показана на рис. 12а затемненной областью) и имеет один единственный план: $P = \pi_{-x}^P \bowtie^P [S(x), \pi_{-z}^P \bowtie^P [\pi_{-y}^P R(x, y, z), U(x, z)]]$. Диссоциация отношения S по y не изменяет надежности запроса, но делает запрос небезопасным с двумя минимальными планами (q' на рис. 12b). Если вместо этого диссоциировать y в обоих отношениях S и U , получившийся запрос q'' будет также безопасным с одним единственным минимальным планом (рис. 12с) $P'' = \pi_{-x,y}^P \bowtie^P [S(x), \pi_{-z}^P \bowtie^P [R(x, y, z), U(x, z)]]$. При этом P'' имеет на 1 проекцию меньше, чем P' .

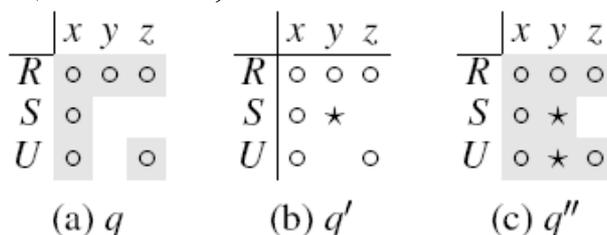


Рис. 12. Применение ФЗ $\Gamma : \mathbf{x} \rightarrow y$ только к подмножеству отношений может обратить безопасный план q в небезопасный q' . Однако запрос q не может стать небезопасным, когда $\Gamma : \mathbf{x} \rightarrow y$ применяется ко всем отношениям(q'').

Алгоритм 3 применяет **Лемму 32** для диссоциации на всех функциональных зависимостях, прежде чем будет вызван **Алгоритм 2**.

Теорема 34 (Алгоритм 3). Алгоритм 3 возвращает содержание и полное перечисление минимальных планов запроса при наличии функциональных зависимостей и детерминированных отношений.

Из завершенности Алгоритмов 1, 2 и 3 и факта, что оба алгоритма 1 и 2 используют эквивалентности в порядках частичных диссоциаций для сокращения числа минимальных планов, следует, что использование схематического представления никогда не сможет увеличить число минимальных планов.

```

Algorithm: FP (PlansWithFunctionalDependencies)
Input: Query  $q(\mathbf{x}) :- R_1(\mathbf{x}_1), \dots, R_m(\mathbf{x}_m)$ 
        Set of FDs  $\Gamma$ , Schema information on deterministic tables
Output: Set of all minimal query plans  $\mathcal{P}$ 
1 forall  $(\Gamma : \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}) \in \Gamma$  and  $R_i \in \mathbf{R}$  do
2   if  $\mathbf{y} \subseteq \text{Var}(R_i)$  then dissociate  $R_i$  on all variables  $\mathbf{z} \setminus \mathbf{x}_i$ 
3   Let  $R'_i(\mathbf{x}'_i)$  be the resulting relations
4   Let  $q'(\mathbf{x}) :- R'_1(\mathbf{x}'_1), \dots, R'_m(\mathbf{x}'_m)$ 
5   DP( $q'$ ) // call to Algorithm 2

```

Алгоритм 3 использует функциональные зависимости для применения селективные диссоциации до вызова Алгоритма 2.

Вывод 35 (Минимальные планы в схематическом представлении). Знание о детерминированных таблицах и функциональных зависимостях не может увеличить число минимальных планов запроса.

Легко увидеть, что Алгоритм 3 возвращает один единственный план запроса только в том случае, если запрос безопасен, принимая во внимание его структуру, детерминированные отношения и функциональные зависимости. Фактически, это есть строгое обобщение всех заведомо свободных само соединяющихся конъюнктивных запросов [4, 5].

Вывод 36 (Дихотомия). Запрос является безопасным, только если Алгоритм 3 возвращает один единственный план.

Пример 37 (Продолжение рабочего примера). Возьмем ключи $R(\underline{z}, x)$ и $S(\underline{u}, y)$, следовательно ФЗ $z \rightarrow x$ и $u \rightarrow y$ сохраняются. Диссоциация всех зависимых переменных приводит к новому запросу q_f (рис. 13а), который имеет только две минимальных безопасных диссоциации (рис. 13b,c) с двумя минимальными планами (рис. 13e), возвращенными Алгоритмом 3. Если дополнительно известно, что отношения R и T являются детерминированными, то запрос становится q_{fd} , который является безопасным (иерархия показана на рис. 13с) и, таким образом, имеет только один единственный план (рис. 13f).

3. Оптимизации мульти-запросов

Алгоритм 3 перечисляет все минимальные планы. Выберем минимальный коэффициент этих планов для вычисления коэффициента распространения $\rho(q)$.

3.1. Оптимизация 1: единственный план запроса

Первая оптимизация создает один единственный план запроса продвижением минимального оператора к листьям. Это предотвращает вычисления, когда ясно, что другие вычисления должны иметь более низкие границы. Идея проста: вместо создания одного подплана запроса для

каждого главного множества $y \in \text{TopSets}(q)$ в строке 10 Алгоритма 1, адаптированный Алгоритм 4 берет минимальный показатель по всем главным множествам, для каждого кортежа главных переменных в строке 10. Таким образом, создается один единственный план запроса. Рис. 14 демонстрирует этот единственный план для рабочего примера.

	x	z	y	u		x	z	y	u		x	z	y	u		x	z	y	u
M	○	○	○	○	M	○	○	○	○	M	○	○	○	○	M	○	○	○	○
R	○	○			R	○	○			R	○	○	●	●	R^d	○	○	★	★
T	★	○			T	★	○			T	★	○	●	●	T^d	★	○	★	★
S			○	○	S	●	●	○	○	S			○	○	S			○	○
U			★	○	U	●	●	★	○	U			★	○	U			★	○

$$\rho(q_f) = \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-x,z}^p \bowtie^p [R(x,z), T(z), \pi_{-y,u}^p \bowtie^p [S(y,u), U(u), M(x,y,z,u)]] \\ \pi_{-y,u}^p \bowtie^p [S(y,u), U(u), \pi_{-x,z}^p \bowtie^p [T(z), R(x,z), M(x,y,z,u)]] \end{array} \right] \quad (e)$$

$$\rho(q_{fd}) = \pi_{-y,u}^p \bowtie^p [S(y,u), U(u), \pi_{-x,z}^p \bowtie^p [T^d(z), R^d(x,z), M(x,y,z,u)]] \quad (f)$$

Рис. 13. Пример 37. Запрос q_f (a) из Примера 25 после применения двух ФЗ $z \rightarrow x$ и $u \rightarrow y$ имеет два минимальных безопасных разобщения/диссоциации (b и c), и два соответствующих минимальных плана запроса, возвращенных Алгоритмом 3. (e). Если R^d и T^d детерминированы, тогда запрос становится безопасным (d) и имеет один единственный минимальный план (f).

$$\rho(q) = \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), M(x,y,z,u)]] \\ \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), M(x,y,z,u)]] \\ \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), M(x,y,z,u)]] \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right] \\ \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), M(x,y,z,u)]] \\ \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), M(x,y,z,u)]] \\ \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y,u), \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x,z), M(x,y,z,u)]] \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Рис. 14. Алгоритм 4 (Оптимизация 1) оценивает только один единственный план запроса путем продвижения минимального оператора вниз к листьям

3.2. Оптимизация 2: Многократное использование общих подпланов

Вторая оптимизация вычисляется однократно, а затем многократно использует общие подпланы, разделенные между минимальными планами. Таким образом, в то время как первая оптимизация сокращает вычисления путем комбинации планов в их корнях, вторая оптимизация сохраняет и

заново использует общие результаты в ветках. Адаптированный **Алгоритм 5** работает следующим образом: он сначала просматривает весь одиночный план запроса и запоминает каждый подплан по используемым подцелям и главным переменным в массиве хэшей HS (строка 12). Если подплан встречается дважды (строка 12), алгоритм создает новое представление этого подплана, устанавливая соответствие подплана с новым представлением. Актуальный план затем использует эти представления, когда это возможно (строка 16). Порядок, в котором создаются эти представления (строка 5), гарантирует, что алгоритм обнаружит и использует вложенные общие подвыражения. Рис. 15 иллюстрирует сгенерированные представления и планы из рабочего примера. Обратите внимание, что главный план и вид V_3 многократно используют виды V_1 и V_2 .

```

Recursive algorithm: SP (SinglePlan)
Input: Query  $q(x) :- R_1(x_1), \dots, R_m(x_m)$ 
Output: Single query plan  $P$ 
1 if  $m = 1$  then  $P \leftarrow \pi_x^p R_1(x_1)$  else
2   if  $q$  is disconnected then
3     Let  $q = q_1, \dots, q_k$  be the components connected by  $EVar(q)$ 
4     Let  $HVar(q_i) \leftarrow HVar(q) \cap VVar(q_i)$ 
5      $P \leftarrow \bowtie^p [SP(q_1), \dots, SP(q_k)]$ 
6   else
7     Let  $TopSets(q) = \{y_1, \dots, y_j\}$ 
8     Let  $q'_i \leftarrow q_i$  with  $HVar(q'_i) \leftarrow HVar(q) \cup y_i$ 
9     if  $j = 1$  then  $P \leftarrow \pi_{y_1}^p SP(q'_1)$ 
10    else  $P \leftarrow \min [\pi_{y_1}^p SP(q'_1), \dots, \pi_{y_j}^p SP(q'_j)]$ 

```

Алгоритм 4 - Оптимизация 1 рекурсивно продвигает минимальный оператор к листьям и производит один единственный план запроса.

3.3. Оптимизация 3: Детерминированное сокращение полусоединений

Самыми затратными операциями в вероятностном запросе являются операции group-by для операций вероятностного проектирования. Они часто применяются в начале плана к кортежам, которые позже будут удалены и не оказывают действия на конечный результат запроса. Смысл третьей оптимизации заключается в первичном применении полного сокращения полусоединений ко входным отношениям до начала вероятностной оценки плана из этих сокращенных входных отношений.

```

Algorithm: UsingCommonSubplans
Input: Query  $q(x) :- R_1(x_1), \dots, R_m(x_m)$ 
Output: Ordered set of view definitions  $\mathcal{V}$ , final query plan  $P$ 
1   $HS \leftarrow \emptyset$  // HashSet of all subplans
2   $HM \leftarrow (\emptyset, \emptyset)$  // HashMap from subplans to unique view names
3   $\mathcal{V} \leftarrow \emptyset$  // Set of view definitions
4   $FS(q)$ 
5  foreach  $q_i \in HM.keys$  in increasing size of  $HVar(q_i)$  and  $Var(q_i)$  do
6  |  $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{HM.val = ViewReusingPlan(q_i)\}$ 
7   $P = RP(q)$ 

Recursive function: FS (FindingCommonSubplans)
Input: Query  $q(x) :- R_1(x_1), \dots, R_m(x_m)$ 
8  if  $q$  is disconnected then
9  | Let  $q = q_1, \dots, q_k$  be the components connected by  $EVar(q)$ 
10 | foreach  $q_i$  do  $FS(q_i(x_i))$ 
11 else
12 | if  $(m = 1 \wedge x = x_i) \vee HM(q) \neq \emptyset$  then return if  $q \in HS \wedge HM(q) = \emptyset$  then
13 |  $HM(q) \leftarrow$  new view name  $HS \leftarrow HS \cup \{q\}$ 
14 | foreach  $y \in TopSets(q)$  do
15 | | Let  $q' \leftarrow q$  with  $HVar(q') \leftarrow HVar(q) \cup y$ 
16 | |  $FS(q')$ 

Recursive function: RP (ViewReusingPlan)
Input: Query  $q(x) :- R_1(x_1), \dots, R_m(x_m)$ 
Output: Query plan  $P$  that reuses views from HashMap  $HM$ 
16 if  $HM(q) \neq \emptyset$  then  $P \leftarrow HM(q)$ 
17 else
18 | Insert here lines 1-11 from Algorithm 4 replacing SP with RP

```

Алгоритм 5 - Оптимизации 1 и 2 вместе создают план запроса, который многократно использует несколько ранее определенных промежуточных представления/проекции.

Алгоритм 6 выдает псевдокод этого сокращения. Поскольку это воздействует на фактическое представление вероятностных таблиц, запишем вероятностные признаки входных таблиц в математическом представлении в отличие от остальной части работы: π_{x_i, p_i} означает

$$\begin{aligned}
 V_1(x, z, u) &= \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y, u), M(x, y, z, u)] \\
 V_2(y, z, u) &= \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x, z), M(x, y, z, u)] \\
 V_3(z, u) &= \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x, z), V_1(x, z, u)] \\ \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y, u), V_2(y, z, u)] \end{array} \right] \\
 \rho(q) &= \min \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-x}^p \bowtie^p [R(x, z), \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), V_1(x, z, u)]] \\ \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), V_3(z, u)] \end{array} \right]] \\ \pi_{-u}^p \bowtie^p [U(u), \min \left[\begin{array}{l} \pi_{-y}^p \bowtie^p [S(y, u), \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), V_2(y, z, u)]] \\ \pi_{-z}^p \bowtie^p [T(z), V_3(z, u)] \end{array} \right]] \end{array} \right] \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Рис. 15. Алгоритм 5 (Оптимизации 1 и 2) использует общие подвыражения в пределах плана запроса путем создания нескольких возможно вложенных видов.

$$\begin{aligned}
 BV(x, y, z, u, p_R, p_S, p_T, p_U, p_M) &: -R(x, z, p_R), S(y, u, p_S), T(z, p_T), \\
 &U(u, p_U), M(x, y, z, u, p_M)
 \end{aligned}$$

$$R^*(x, z, p_R) : -BV(x, y, z, u, p_R, p_S, p_T, p_U, p_M)$$

$$S^*(y, u, p_S) : -BV(x, y, z, u, p_R, p_S, p_T, p_U, p_M)$$

$$T^*(z, p_T) : -BV(x, y, z, u, p_R, p_S, p_T, p_U, p_M)$$

$$U^*(u, p_U) : -BV(x, y, z, u, p_R, p_S, p_T, p_U, p_M)$$

$$M^*(x, y, z, u, p_M) : -BV(x, y, z, u, p_R, p_S, p_T, p_U, p_M)$$

Рис. 16. Алгоритм 6 (Оптимизация 3) выполняет полное сокращение полусоединений до фактической вероятностной оценки. Эти запросы являются детерминированными и переменные p_{R_i} обозначают здесь вероятностные признаки таблиц

Algorithm: SR (SemiJoinReduction)
Input: Query $q(\mathbf{x}) : -R_1(\mathbf{x}_1), \dots, R_m(\mathbf{x}_m)$
Output: Set of view definitions: BV, R_1^*, \dots, R_m^* ,
 New query q^* over those views

- 1 $BV = \bowtie [R_1(\mathbf{x}_1, p_1), \dots, R_m(\mathbf{x}_m, p_m)]$
- 2 **foreach** $i \in [m]$ **do**
- 3 $R_i^* = \pi_{\mathbf{x}_i, p_i} BV(\text{Var}(q), \mathbf{p})$
- 4 Let $q^*(\mathbf{x}) : -R_1^*(\mathbf{x}_1), \dots, R_m^*(\mathbf{x}_m)$
- 5 **UsingCommonSubplans**(q^*) // applying Algorithm 5

Алгоритм 6 - Оптимизация 3 осуществляет полное детерминированное сокращение полусоединений до актуальной вероятностной оценки запроса детерминированный проект с двойным устранением на переменных отношения R_i , включая вероятностный признак p_i , а $\bowtie [\dots]$ означает

оператор естественного соединения. Схема таким образом выглядит так: $BV(\text{Var}(q), p_1, \dots, p_m)$. Рис. 16 показывает сокращение, применяемое к рабочему примеру.

Библиографический список

1. Нгуен Сон Лам, Кравец О.Я. Подход к управлению вероятностными базами данных на основе диссоциации запросов и коэффициента распространения// Информационные технологии моделирования и управления, №2 (92), 2015. – С. 171-181.
2. Нгуен Сон Лам, Кравец О.Я. Управление вероятностными базами данных с большими пакетами и графовыми алгоритмами: вариант решения задачи на основе оценки запроса в ядре СУБД// Экономика и менеджмент систем управления, №1.2(15), 2015. – С. 238-246.
3. Нгуен Сон Лам, Кравец О.Я. Алгоритмизация генерации минимальных планов запросов в вероятностных базах данных и численные оценки надежности // Экономика и менеджмент систем управления, №2.2(16), 2015. – С. 284-292.
4. Dalvi N.N., Suciu D. Efficient query evaluation on probabilistic databases// VLDB J., 2007, 16(4):523–544.
5. Olteanu D., Huang J., Koch C. Sprout: Lazy vs. eager query plans for tuple-independent probabilistic databases// ICDE, 2009, p. 640–651.

Song Lam Nguyen, O.Ja.Kravets

Application of block representation of data for simplification and abbreviation of number of the minimum plans of request

Abstract. Application of block representation of data for simplification and abbreviation of number of the minimum plans of request discussed in this article.

Keywords: Databases, request plan, optimization

УДК 539.3:534.1

С.В. Сторожев

Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

УЧЕТ ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ОБЪЕМНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АППАРАТА ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Аннотация. В представленной работе с применением эвристического принципа обобщения получены аналитические формы описания нечетких оценок фазовых скоростей и импедансов для объемных упругих волн в изотропных средах, показателей отражения и преломления объемных волн у границы раздела разнородных изотропных полупространств, а также оценки для параметра толщины изотропного слоя, полученные по нечетким данным о длительности задержки диагностического импульса.

Ключевые слова: Волновая механика упругих сред, объемные упругие волны, факторы неопределенности физико-механических и геометрических параметров моделей, аппарат теории нечетких множеств, эвристический принцип обобщения, нечеткость фазовых скоростей, нечеткость импедансов, нечеткость показателей отражения-преломления на границе контакта полупространств.

Введение. Учет различных факторов неопределенности в теоретических моделях механики деформируемого твердого тела является одним из актуальных направлений исследований для данной научной отрасли, особенно в связи с практическими приложениями результатов математического моделирования. Эта проблема имеет очень широкий круг аспектов, к которым, среди многих других, можно отнести задачи учета неопределенности в значениях характеристик деформируемых материалов, задачи учета факторов неопределенности в описании геометрического строения упругих структур и элементов конструкций, проблему неопределенности в описании режимов деформирования при нечетких внешних воздействиях.

В частности, для многих типов классифицируемых упругих материалов характерным является существенный разброс в экспериментально определяемых значениях физико-механических постоянных. В наибольшей мере это свойство характерно для геоматериалов и композитов. В первом случае однотипно классифицируемые горные материалы, как правило, различаются по структуре и компонентности химического состава, по условиям формирования. Так, к примеру, известно, что материалы угольных

пластов и вмещающих пород имеют весьма существенно различающиеся механические свойства даже в пределах одного поля разработки. Характеристика нечёткости, неконтрастности значений экспериментально определяемых физико-механических постоянных для различных типов осадочных горных пород и различных марок углей представлена в публикациях А. В. Молодецкого, В. Н. Реввы [11], А. Н. Ставрогина, А. Г. Протосени [13]. Разброс в значениях механических характеристик композитов связан с технологическими особенностями их изготовления.

К задачам математического моделирования в волновой механике деформируемых сред с учетом неопределенности значений физико-механических постоянных в первую очередь относятся задачи оценки разброса характеристик, используемых в технологиях волнового зондирования, геоакустике и ультразвуковой дефектоскопии. К числу таких характеристик принадлежат фазовые и групповые скорости упругих волн, волновые сопротивления (импедансы) для сред распространения, длительности задержки при распространении диагностических волновых импульсов, показатели отражения и преломления упругих волн в составных телах.

В качестве подходов к учету факторов неопределенности в математических моделях естественных наук сегодня используются методы теории вероятностей и математической статистики [10], а также методы нечеткой математики (методы теории нечетких множеств) [2, 5, 7, 8, 14, 15, 17, 18]. Подходы, основанные на использовании аппарата теории нечетких множеств, распространены в меньшей мере, хотя имеют определенные априорные преимущества в виде возможностей оперирования непосредственно с нечеткими величинами, а не с их разнопорядковыми усредненными интегральными характеристиками.

В этом контексте, целями представляемого исследования является получение нечетких оценок для ряда характеристик волнового деформирования упругих сред с использованием методов алгебры нечётких переменных [1, 3, 15, 17, 18] и эвристического принципа обобщения [5, 8, 12] для перехода к нечётким аргументам в классических аналитических соотношениях для определения скоростей и импедансов объёмных упругих волн в изотропных средах [6, 9, 16], показателей отражения и преломления объёмных упругих волн на границе раздела двух изотропных полупространств [4, 6], оценок для параметра толщины изотропного слоя, получаемых по нечетким данным о длительности задержки диагностического импульса. При этом принимаются гипотезы об интерпретации нечетких значений некоторых параметров моделей трапецеидальными нечеткими интервалами [3, 5, 7], частными случаями которых являются нечеткие числа.

Нечеткие оценки фазовых скоростей и импедансов для объёмных упругих волн в изотропных упругих средах. Фазовые и групповые

скорости бездисперсных объемных волн продольного (P) и сдвигового (S) типа в изотропных идеально упругих средах, а также соответствующие волновые сопротивления (импедансы) n_p, n_s имеют аналитические представления

$$v_{fp} = v_{gp} = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}, v_{fs} = v_{gs} = (\mu/\rho)^{1/2} \quad (1)$$

$$n_p = ((\lambda + 2\mu)\rho)^{1/2}, n_s = (\mu\rho)^{1/2} \quad (2)$$

в которых λ, μ – модули упругости Ламе ρ – параметр плотности. Нечеткие оценки для указанных характеристик объемных упругих волн формируются путем применения к соотношениям (1) и (2) эвристического принципа обобщения, позволяющего расширить область определения отображения на нечеткие подмножества универсального множества. Эффективная прикладная схема использования принципа обобщения применительно к общему случаю классической функции многих переменных $y(x_1, \dots, x_n)$ базируется на представлении нечетко-множественных величин декомпозицией по множествам α - уровня A_α [5, 12], а также следующих допущениях относительно свойств $y(x_1, \dots, x_n)$: область изменения аргументов функции непрерывна; функция дифференцируема в области определения; область определения функции представима в виде

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3, X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_3 = X_1 \cap X_3 = \emptyset, \quad (3)$$

$$X_1 = \{x_r : \partial y / \partial x_r \geq 0\}, X_2 = \{x_s : \partial y / \partial x_s \leq 0\},$$

$$X_3 = \{x_1 : \text{sign}(\partial y / \partial x_1) = \text{sign}(g_1(x_r, x_s))\},$$

$g_1(x_r, x_s) = \partial y / \partial x_1$ – не зависящая от x_l вспомогательная функция. В предположении о том, что нечетко-множественные аргументы \tilde{x}_i функции $y(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ представлены в виде разложений

$$\tilde{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} (x_{i\alpha}, \bar{x}_{i\alpha}), \quad (4)$$

в которых $x_{i\alpha}, \bar{x}_{i\alpha}$ верхние и нижние грани множеств α - уровней, для нечеткого отображения $y(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ справедливо представление

$$y_i = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \left\{ f(x_{r\alpha}, \bar{x}_{s\alpha}, x_{l\alpha}^I), f(\bar{x}_{r\alpha}, x_{s\alpha}, x_{l\alpha}^{II}) \right\}, \quad (5)$$

где

$$x_{l\alpha}^I = \begin{cases} x_{l\alpha}, & \text{при } g_l(x_r, \bar{x}_s) \geq 0, \\ \bar{x}_{l\alpha}, & \text{при } g_l(x_r, \bar{x}_s) < 0; \end{cases} x_{l\alpha}^{II} = \begin{cases} \bar{x}_{l\alpha}, & \text{при } g_l(\bar{x}_r, x_s) \geq 0, \\ x_{l\alpha}, & \text{при } g_l(\bar{x}_r, x_s) < 0. \end{cases} \quad (6)$$

В рамках использования принципа обобщения для получения искомым нечетких оценок полагается, что упругие постоянные λ, μ материала слоя и

его плотность ρ описываются нечеткими интервалами с реперными точками $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$. В этом случае нечеткие оценки для фазовых скоростей v_{fp} , v_{fs} соответственно представляются нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_{vp} = \mu_{*vp}^{1/2}$, $\mu_{vs} = \mu_{*vs}^{1/2}$, где, μ_{*vp} , μ_{*vs} – соответственно функции принадлежности для трапецидальных нечетких множеств с кортежами реперных точек

$$((\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_4, (\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_3, (\lambda_3 + 2\mu_3)/\rho_2, (\lambda_4 + 2\mu_4)/\rho_1),$$

$$(\mu_1/\rho_4, \mu_2/\rho_3, \mu_3/\rho_2, \mu_4/\rho_1).$$

Таким образом,

$$\mu_{vp}(v_{fp}) = \{0, v_{fp} \leq ((\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_4)^{1/2}; \quad (7)$$

$$((v_{fp} - (\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_4)/((\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_3 - (\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_4))^{1/2},$$

$$((\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_4)^{1/2} \leq v_{fp} \leq ((\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_3)^{1/2};$$

$$1, ((\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_3)^{1/2} \leq v_{fp} \leq ((\lambda_3 + 2\mu_3)/\rho_2)^{1/2};$$

$$((\lambda_4 + 2\mu_4)/\rho_1 - v_{fp})/((\lambda_4 + 2\mu_4)/\rho_1 - (\lambda_3 + 2\mu_3)/\rho_2))^{1/2},$$

$$((\lambda_3 + 2\mu_3)/\rho_2)^{1/2} \leq v_{fp} \leq ((\lambda_4 + 2\mu_4)/\rho_1)^{1/2};$$

$$0, v_{fp} \geq ((\lambda_4 + 2\mu_4)/\rho_1)^{1/2}\};$$

$$\mu_{vs}(v_{fs}) = \{0, v_{fs} \leq (\mu_1/\rho_4)^{1/2}; \quad (8)$$

$$((v_{fs} - \mu_1/\rho_4)/(\mu_2/\rho_3 - \mu_1/\rho_4))^{1/2}, (\mu_1/\rho_4)^{1/2} \leq v_{fs} \leq (\mu_2/\rho_3)^{1/2};$$

$$1, (\mu_2/\rho_3)^{1/2} \leq v_{fs} \leq (\mu_3/\rho_2)^{1/2};$$

$$(\mu_4/\rho_1 - v_{fs})/(\mu_4/\rho_1 - \mu_3/\rho_2))^{1/2}, (\mu_3/\rho_2)^{1/2} \leq v_{fs} \leq (\mu_4/\rho_1)^{1/2};$$

$$0, v_{fs} \geq (\mu_4/\rho_1)^{1/2}\}.$$

Нечеткие оценки для импедансов n_p , n_s соответственно описываются нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_{Ip} = \mu_{*Ip}^{1/2}$, $\mu_{Is} = \mu_{*Is}^{1/2}$, где, μ_{*Ip} – функции принадлежности для трапецидальных нечетких множеств с кортежами реперных точек $((\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1, (\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2, (\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3, (\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4)$ и $(\mu_1\rho_1, \mu_2\rho_2, \mu_3\rho_3, \mu_4\rho_4)$. В результате могут быть получены представления

$$\mu_{Ip}(n_p) = \{0, n_p \leq ((\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1)^{1/2}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & ((n_p - (\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1)/((\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2 - (\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1))^{1/2}, \\
 & ((\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1)^{1/2} \leq n_p \leq ((\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2)^{1/2}; \\
 & 1, ((\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2)^{1/2} \leq n_p \leq ((\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3)^{1/2}; \\
 & ((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4 - n_p)/((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4 - (\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3))^{1/2}, \\
 & ((\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3)^{1/2} \leq n_p \leq ((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4)^{1/2}; \\
 & 0, n_p \geq ((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4)^{1/2} \}; \\
 \\
 & \mu_{Is}(n_s) = \{0, n_s \leq (\mu_1\rho_1)^{1/2}; \\
 & ((n_s - \mu_1\rho_1)/(\mu_2\rho_2 - \mu_1\rho_1))^{1/2}, (\mu_1\rho_1)^{1/2} \leq n_s \leq (\mu_2\rho_2)^{1/2}; \\
 & 1, (\mu_2\rho_2)^{1/2} \leq n_s \leq (\mu_3\rho_3)^{1/2}; \\
 & (\mu_4\rho_4 - n_s)/(\mu_4\rho_4 - \mu_3\rho_3))^{1/2}, (\mu_3\rho_3)^{1/2} \leq n_s \leq (\mu_4\rho_4)^{1/2}; \\
 & 0, n_s \geq (\mu_4\rho_4)^{1/2} \}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В частных случаях $\lambda_2 = \lambda_3, \mu_2 = \mu_3, \rho_2 = \rho_3$ приведенные оценки относятся к вариантам задания нечетких физико-механических постоянных изотропных материалов нечеткими числами.

Нечеткие оценки для характеристик процессов отражения - преломления объемных волн с плоским фронтом у границы раздела разнородных изотропных полупространств. В задаче о нормальном падении продольных гармонических объемных волн с плоским фронтом на границу идеального механического контакта разнородных характеризующихся физико-механическими постоянными $\rho^{(+)}, \lambda^{(+)}, \mu^{(+)}$ и $\rho^{(-)}, \lambda^{(-)}, \mu^{(-)}$ изотропных полупространств, занимающих области $V^{(+)} = \{-\infty < x_1 x_2 < \infty, x_3 \geq 0\}$ и $V^{(-)} = \{-\infty < x_1 x_2 < \infty, x_3 < 0\}$, в случае движения волны произвольной частоты с амплитудным параметром $u_{30}^{(пад)}$ вдоль положительного направления Ox_3 из $V^{(-)}$ в $V^{(+)}$ амплитудные составляющие отраженной и преломленной волн имеют представления [4]

$$u_{30}^{(отр)} = n_{отр}^{(-+)} u_{30}^{(над)}, \quad u_{30}^{(прел)} = n_{прел}^{(-+)} u_{30}^{(над)}, \tag{11}$$

в которых

$$n_{отр}^{(-+)} = (n_p^{(-)} - n_p^{(+)}) / (n_p^{(-)} + n_p^{(+)}), \quad n_{прел}^{(-+)} = 2n_p^{(-)} / (n_p^{(-)} + n_p^{(+)}), \tag{12}$$

$n_p^{(\pm)} = ((\lambda^{(\pm)} + 2\mu^{(\pm)})/\rho^{(\pm)})^{1/2}$ – волновые сопротивления для материалов полупространств $V^{(+)}$, $V^{(-)}$.

Используя далее представления для нечетко-множественных величин $n_p^{(\pm)}$ в виде декомпозиций по множествам α - уровня

$$n_p^{(\pm)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (((1-\alpha)((\lambda_1^{(\pm)} + 2\mu_1^{(\pm)})\rho_1^{(\pm)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(\pm)} + 2\mu_2^{(\pm)})\rho_2^{(\pm)})^{1/2}, (13)$$

$$\alpha((\lambda_3^{(\pm)} + 2\mu_3^{(\pm)})\rho_3^{(\pm)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(\pm)} + 2\mu_4^{(\pm)})\rho_4^{(\pm)})^{1/2})$$

можно получить соответствующую форму описания для нечетких оценок характеристик $n_{отр}^{(-+)}$, $n_{прел}^{(-+)}$:

$$n_{отр}^{(-+)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((((((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2}) -$$

$$- (\alpha((\lambda_3^{(+)} + 2\mu_3^{(+)})\rho_3^{(+)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(+)} + 2\mu_4^{(+)})\rho_4^{(+)})^{1/2}))/$$

$$/(((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2}) +$$

$$+ \alpha((\lambda_3^{(+)} + 2\mu_3^{(+)})\rho_3^{(+)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(+)} + 2\mu_4^{(+)})\rho_4^{(+)})^{1/2})),$$

$$((\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)})\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)})\rho_4^{(-)})^{1/2}) - (14)$$

$$+ (((1-\alpha)((\lambda_1^{(+)} + 2\mu_1^{(+)})\rho_1^{(+)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(+)} + 2\mu_2^{(+)})\rho_2^{(+)})^{1/2}))/$$

$$/(((\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)})\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)})\rho_4^{(-)})^{1/2}) +$$

$$+ (1-\alpha)((\lambda_1^{(+)} + 2\mu_1^{(+)})\rho_1^{(+)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(+)} + 2\mu_2^{(+)})\rho_2^{(+)})^{1/2})))));$$

$$n_{прел}^{(-+)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (2((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2})/$$

$$/(((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2}) +$$

$$+ \alpha((\lambda_3^{(+)} + 2\mu_3^{(+)})\rho_3^{(+)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(+)} + 2\mu_4^{(+)})\rho_4^{(+)})^{1/2})), (15)$$

$$2(\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)})\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)})\rho_4^{(-)})^{1/2}) /$$

$$/(((\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)})\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)})\rho_4^{(-)})^{1/2}) +$$

$$+ (1-\alpha)((\lambda_1^{(+)} + 2\mu_1^{(+)})\rho_1^{(+)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(+)} + 2\mu_2^{(+)})\rho_2^{(+)})^{1/2}))))).$$

Оценки для параметра толщины изотропного слоя по нечетким данным о длительности задержки диагностического импульса. Задача учета факторов неопределенности возникает также в процессе получения оценок для параметра толщины h плоскопараллельного изотропного упругого слоя, идентифицируемой в теоретической модели по нечетким

данным о физико-механических параметрах материала и нечетким измерениям времени задержки Δt диагностической упругой волны продольного типа, проходящей по толщине слоя в прямом и обратном направлении. Предполагается, что экспериментально устанавливаемое время задержки диагностического импульса Δt является трапецеидальной нечетко-интервальной характеристикой с реперными точками $(\Delta t_{1F}, \Delta t_{1M}, \Delta t_{2M}, \Delta t_{2F})$, представляемой декомпозицией по множествам α - уровня

$$\bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((\alpha \cdot \Delta t_{1M} + (1-\alpha) \cdot \Delta t_{1F}), (\alpha \cdot \Delta t_{2M} + (1-\alpha) \cdot \Delta t_{2F})). \quad (16)$$

На основе принципа обобщения при использовании соотношения $h = (v_{fp} \cdot \Delta t) / 2$, нечеткие оценки искомого параметра в форме разложения по множествам α - уровня для случая продольной диагностической волны в слое с нечетко-интервально идентифицируемыми физико-механическими постоянными могут быть записаны в виде

$$h = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (((1-\alpha)((\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_4^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho_3)^{1/2})(\alpha \Delta t_{1M} + (1-\alpha) \Delta t_{1F}) / 2, (\alpha((\lambda_3 + 2\mu_3) / \rho_2)^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4 + 2\mu_4) / \rho_1)^{1/2})(\alpha \Delta t_{2M} + (1-\alpha) \Delta t_{2F}) / 2). \quad (17)$$

Примеры нечетких численных оценок. В качестве примера использования полученных расчетных соотношений представлены нечеткие оценки фазовых скоростей для угольного массива с усредненными характеристиками [10]

$$E=0.28 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \nu=0.30, \rho = 1.69 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3,$$

имеющими 30% разброс экспериментально определяемых значений. Исходя из соотношений связи механических параметров $\lambda = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $\mu = E / (2(1 + \nu))$ для угля находятся осредненные оценки $\lambda = 0.149 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\mu = 0.109 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Соответствующие реперные величины для треугольных нечетких чисел, описывающих физико-механические постоянные угля с учетом уровней разброса экспериментальных данных имеют значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.104 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.149 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \lambda_4 = 0.194 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \\ \mu_1 &= 0.076 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \mu_2 = \mu_3 = 0.109 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \mu_4 = 0.142 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \\ \rho_1 &= 1.169 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3, \rho_2 = \rho_3 = 1.69 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3, \rho_4 = 2.197 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3. \end{aligned}$$

С использованием представленной в работе методики, для реперных значений нечетких множеств, описывающих величины фазовых скоростей

объемных упругих волн продольного и сдвигового типа в рассматриваемом угольном массиве, получены оценки:

$$v_{1fp} = 1079 \text{ м/сек}, v_{2fp} = v_{3fp} = 1473 \text{ м/сек}, v_{4fp} = 2022 \text{ м/сек};$$
$$v_{1fs} = 588 \text{ м/сек}, v_{2fs} = v_{3fs} = 803 \text{ м/сек}, v_{4fs} = 1102 \text{ м/сек}.$$

Приведенные значения ограничивают интервалы, вне которых значения рассматриваемых скоростей имеют нулевую достоверность, а также представляют их наиболее достоверную величину.

Выводы. В представленной работе в контексте применения аппарата теории нечетких множеств для учета факторов неопределенности в математических моделях волновых процессов в деформируемых упругих телах с применением эвристического принципа обобщения получены нечеткие оценки фазовых скоростей объемных упругих волн и волновых сопротивлений для изотропных сред, нечеткие оценки характеристик отражения - преломления объемных волн с плоским фронтом у границы раздела разнородных изотропных полупространств, а также оценки для параметра толщины изотропного слоя по нечетким данным о длительности задержки диагностического импульса. Полученные результаты могут быть использованы как элементы теоретической базы разработок в области технологий геоакустики, ультраакустической диагностики, ультразвукового неразрушающего контроля.

Библиографический список

1. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография / Алтунин А.Е., Семухин М.В. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.
2. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. / Вопенка П. – М: Мир, 1983. – 152 с.
3. Герасимов Б.М. Системы поддержки принятия решений: проектирование, применение, оценка эффективности / Герасимов Б.М., Дивизинюк М.М., Субач И.Ю. – Севастополь: СНИЯЭиП, 2004. – 318 с.
4. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284с.
5. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. – М.: Издательство Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
6. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424с.
7. Ибрагимов В.А. Элементы нечеткой математики / Ибрагимов В.А. – Баку: Азербайджанская государственная нефтяная академия, 2009. – 267 с.
8. Корман А. Введение в теорию нечётких множеств / Корман А. – М. Радио и связь, 1982. – 432 с.

9. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наукова думка, 1985. – 176с.
10. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
11. Молодецкий А.В. Влияние глубины залегания угольных пластов на механические свойства угля / А.В. Молодецкий, В.Н. Ревва // Физико-технические проблемы горного производства: Зб. наук. пр. –2009. – Вип. 12. – С. 55-58.
12. Ротштейн А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н. – Винница: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2007. – 215 с.
13. Ставрогин А.Н. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня – Москва.: Недра, – 1986. — 312 с.
14. Ухоботов В. И. Избранные главы теории нечетких множеств : учеб. пособие / Ухоботов В. И. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. – 245 с.
15. Хапатхаева Н.Б. Введение в теорию нечётких множеств. Часть 1 / Хапатхаева Н.Б., Дамбаева С.В., Аюшеева Н.Н. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2004. – 68 с.
16. Шутилов В.А. Основы физики ультразвука / В.А. Шутилов – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980. – 280с.
17. Nasseri S.H. A New Method for Ordering LR Fuzzy Number / Nasseri S.H., Taleshian F., Alizadeh Z., Vahidi J. – The Journal of Mathematics and Computer Science. – 2012. – Vol. 4. – No.3. – P. 283 – 294.
18. Thorani Y. L. P. Ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers / Thorani Y. L. P., Rao P. P. B., Shankar N. R. – Int. J. Contemp. Math. Sciences, 2012. – Vol. 7. – №. 12. – P. 555 – 573.

~ S.V. Storozhev

~ **Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets**

~ **Abstract.** With using a heuristic principle of generalization are obtained the analytical form for fuzzy estimation of phase velocities and impedances for elastic waves in isotropic media, fuzzy indices of reflection and refraction of waves at the interface of isotropic half-spaces and estimates for the thickness of isotropic layer by fuzzy data on delay of duration of diagnostic pulse.

~ **Keywords:** Wave mechanics of elastic media, waves of deformation, factors of uncertainties for mechanical and geometrical parameters of the models, the theory of fuzzy sets, heuristic principle of generalization, fuzzy phase velocities, fuzzy impedance, fuzziness indices of refraction, reflection at the interface semispaces.

УДК 004.7

Тхоай Ань Нгуен

Университет транспорта и коммуникации, г.Ханой, Вьетнам

**ИЗУЧЕНИЕ СИСТЕМ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ
ОЧЕРЕДИ М/М/1**

Аннотация. Проведено изучение систем с нестационарными параметрами очереди М/М/1.

Ключевые слова: Система массового обслуживания, нестационарные параметры

Введение

В статье рассматриваются очереди М/М/1 с изменяющейся интенсивностью обслуживания. Сделано предположение о том, что интенсивность обслуживания зависит от случайного окружения, представленного посредством некоторого процесса $(X(t))$, который берет свои значения из некоторого (дискретного или непрерывного) пространства состояний и предполагается, что этот процесс стационарен. Изучение этих систем с очередями мотивировано рядом инженерных проблемам.

Рассмотрим линию передачи телекоммуникационной сети, передающей трафик, который может адаптироваться к уровню загрузки сети (эластичный трафик) и небольшое количество трафика, который неустойчив к задержкам сети (неэластичный трафик). Проблема, рассматриваемая в работе – определение количественных характеристик, описывающих влияние неэластичного трафика на эластичный.

В реальности, эластичный трафик контролируется так называемым протоколом управления передачей (TCP), который был разработан для того, чтобы добиться равномерного распределения полос пропускания между достаточно длинными потоками при прохождении ими узких каналов связи. Если предположить, что рассматриваемый канал связи является узким (например, канал доступа к сети), то разумно предположить, что пропускная способность распределяется между различными конкурирующими потоками эластичного трафика в соответствии с дисциплиной разделения обслуживающего устройства (для примера см. [7, 15]). Тогда неэластичный трафик состоит из небольших передач данных, которые слишком малы, чтобы адаптироваться к уровню загрузки сети (см. современные исследования [4, 5, 9, 12, 13, 14]). В работе будем считать, что длинные потоки трафика прибывают в соответствии с Пуассоновским процессом.

В соответствии с приведенными выше предположениями, воздействие неэластичного трафика на эластичный выглядит как некоторые небольшие возмущения доступной полосы пропускания.

Кроме того, когда неэластичный трафик отсутствует, в соответствии со свойством нечувствительности очереди с разделением обрабатывающего устройства $M/G/1$, количество длинных потоков идентично числу клиентов в очереди $M/M/1$. Таким образом, для того, чтобы описать поведение длинных потоков в случае неэластичного трафика, рассмотрим очередь $M/M/1$ со интенсивностью обслуживания, изменяющейся в зависимости от количества неэластичного трафика (например, может изменяться число маленьких потоков и их полосы пропускания). Проблема тогда состоит в том, чтобы оценить влияние неэластичного трафика на производительность системы. Например, классической проблемой является исследование обоснованности, так называемой аппроксимации сокращенного времени обслуживания (RSR), которая основывается на том предположении, что интенсивность обслуживания длинных потоков данных снижается при средней загрузке неэластичного трафика. Примеры использования аппроксимации RSR представлены в [1, 11].

Системы массового обслуживания с изменяющейся во времени интенсивностью обслуживания были ранее рассмотрены в различных ситуациях, например в [18] рассматривается система массового обслуживания, в которой приоритетное внимание уделяется нескольким потокам, управляемым Марковски модулированным Пуассоновским процессом (ММРР), с конечным пространством состояний и низким приоритетом потоков, которые распределяют оставшуюся емкость обслуживающего устройства в соответствии с дисциплиной разделения обслуживающего устройства. Предполагая, что вызовы прибывают в систему в соответствии с пуассоновским законом, и что время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, авторы [18] получают решение с помощью матричных методов анализа. Похожие модели были изучены в работах [16, 17] с помощью квази-процесса рождения и гибели, связанного с системой, и с помощью матричных методов анализа. В данном случае, характеристики очереди в равновесии выражаются в терминах спектральных величин некоторых матриц. В [2] описаны и изучены с помощью анализа возмущений Марковских цепей приоритетные системы обслуживания с быстрой динамикой, которые могут быть описаны с помощью квази-процессов рождения и гибели. В [6] изучаются распределения с хвостом очереди $M/M/1$ с двумя скоростями обслуживания.

Достаточно сложно получить качественные результаты для систем массового обслуживания с изменяемыми скоростями обслуживания, например, для изучения влияния изменяющейся скорости обслуживания на производительность системы. Интуитивно понятно, что изменяющаяся

интенсивность будет ухудшать производительность, но строго говоря, об этом мало что известно. Основная цель работы заключается в получении представления об этих явлениях, рассматривая системы со слабыми возмущениями.

В работе предполагается, что интенсивность обслуживания очереди $M/M/1$ во время t равна $\mu + \varepsilon p(X(t))$ для некоторой функции p , где $(X(t))$ есть процесс, описывающий окружение, влияющее на интенсивность обслуживания. В [8] предложено, что процесс $(X(t))$ есть процесс диффузии, и что $p(x) = -x$. В этой работе предполагается, что функция возмущений p имеет общий характер и что процесс, описывающий окружение $(X(t))$ стационарный и Марковский.

Кроме того, большой интерес представляет разложение степенного ряда, описывающего средний период занятости по ε , что является количественной величиной возмущений. Аппроксимация RSR применима относительно члена первого порядка: очередь с изменяющимся временем обслуживания идентична очереди $M/M/1$ с фиксированным временем обслуживания, эквивалентным среднему времени обслуживания $\mu + \varepsilon E(p(X(0)))$.

Обобщая наблюдения с результатами, полученными в [3], можно заключить, что аппроксимация RSR справедлива при среднем уровне загрузке очереди клиентами. Анализ члена второго порядка гораздо сложнее; корреляции процесса $(X(t))$ начинают играть существенную роль, и соответственно аппроксимация RSR перестает быть актуальной.

Работа организована следующим образом. Модель описана в разделе 2. В разделе 3 производится вычисление члена первого порядка степенного ряда, описывающего среднюю продолжительность периода занятости.

В следующих статьях будет выведен член второго порядка и обсуждены возможные применения полученных результатов.

2. Модель

2.1. Обозначения и допущения

Везде на протяжении данной работы $Z(t)$ определяет число клиентов в момент времени t в очереди $M/M/1$, со интенсивностью поступления λ и интенсивностью обслуживания μ . Переменная V означает продолжительность обслуживания для одного клиента. Известно, что $Z(0) = 1$, $V = \inf \{s \geq 0 : Z(s) = 0\}$.

Предполагается, что условие стабильности $\lambda < \mu$ выполняется. $(L(t))$ распределено геометрически, с параметром $\rho = \lambda/\mu$. Для $x \geq 1$ переменная V_x означает продолжительность обслуживания для x клиентов. По определению, $V_1 = V$. Условимся, что если далее будем использовать переменные V , V_1 и V'_1 , то предполагается, что они независимы и распределены по одному и тому же закону. Для краткости, будем называть эту очередь S -очередью.

Для $\xi \geq 0$ N_ξ означает Пуассоновский процесс интенсивностью ξ . Аналогично, для $0 \leq a < b$, $N_\xi([a, b])$ означает количество точек случайного дискретного процесса на интервале $[a, b]$. В частности, N_λ будет представлять процесс, описывающий интенсивность прибытия, N_μ - процесс обслуживания в S-Очереди. Предполагается, что Пуассоновские процессы N_λ и N_μ независимы друг от друга и от модулирующего Марковского процесса $(X(t))$. Процесс $(Z(t))$ может быть представлен как решение стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} dZ(t) &= Z(t) - Z(t-) = N_\lambda([t, t + dt]) - L_{\{Z(t-) > 0\}} N_\mu([t, t + dt]) = \\ &= dN_\lambda(t) - L_{\{Z(t-) > 0\}} N_\mu(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $Z(t-)$ есть левый предел $Z(s)$ при $s \rightarrow t$. Представление Марковских процессов массового обслуживания в виде решения стохастических дифференциальных уравнений описано в [19].

Очередь с возмущениями. Рассмотрим очередь M/M/1, интенсивность обслуживания которой определяется как функция от некоторого процесса $(X(t))$, который берет значения из некоторого пространства, обозначаемого S. Предполагаем, что процесс $(X(t))$ – эргодический Марковский процесс на S. Обычно пространство состояний окружения S есть конечный (или исчислимый) набор, на котором $(X(t))$ есть Марковски Модулированный Пуассоновский Процесс (ММРП), либо, в случае диффузии, $S = \mathbb{R}$ (для примера см. [8]). Инвариантная мера процесса $(X(t))$ обозначается как ν . Марковское обозначение $E_x(\square)$ будет относиться только к начальному состоянию x Марковского процесса $(X(t))$, таким образом $E_\nu(\square)$ будет означать предполагаемое значение, когда процесс $(X(t))$ находится в точке равновесия.

Переменная $\tilde{Z}^\varepsilon(t)$ означает число клиентов во время t в очереди M/M/1 с изменяющейся во времени интенсивностью обработки. Процесс $(\tilde{Z}^\varepsilon(t), X(t))$ есть Марковский процесс. Переходы процесса $(\tilde{Z}^\varepsilon(t))$ задаются следующим образом: если $\tilde{Z}^\varepsilon(t) = 1$ и $X(t) = x$ в момент t ,

$$1 \rightarrow \begin{cases} 1 + 1 \text{ при интенсивности } \lambda, \\ 1 - 1 \text{ при интенсивности } (\mu + \varepsilon p(x)) L_{\{1 > 0\}} \end{cases}$$

для некоторой функции $p(x)$ на пространстве состояний окружения S и некоторого маленького параметра $\varepsilon \geq 0$.

Если $p(x) > 0$, это означает, что есть свободное место для обслуживания в сравнении с S-Очередью. Напротив, если $p(x) < 0$, обслуживающее устройство имеет меньшую пропускную способность, чем у S-Очереди. Величина $p^+(a)$ (и соответственно $p^-(a)$) определяется как $\max(p(a), 0)$ (соответственно $\max(0, -p(a))$). В момент $t \geq 0$ дополнительная емкость определяется как

$\varepsilon p^+(X(t))$ и $-\varepsilon p^-(X(t))$ есть занятая емкость. Возмущения, рассматриваемые в статье - регулярные [2].

Переменная \tilde{B}^ε означает продолжительность периода занятости, начинающегося с одного клиента, учитывая, что $\tilde{Z}^\varepsilon = 1$,

$$\tilde{B}^\varepsilon = \inf \{s \geq 0 : \tilde{Z}^\varepsilon(s) = 0\}.$$

Для $x \geq 1$ переменная \tilde{B}_x^ε означает продолжительность периода занятости, начинающегося с x клиентов ($\tilde{B}_1^\varepsilon = \tilde{B}^\varepsilon$).

Предположим, что:

(H1) функция $|p(x)|$ ограничена константой $M > 0$

(H2) $\varepsilon \sup \{|p(x)| : x \in S\} < \mu$.

Следующее утверждение утверждает, что длина цикла занятости интегрируема. Остальная часть статьи посвящена расширению его ожидаемого значения по отношению к ε .

Утверждение 1. При $\lambda < \mu$ существуют некоторые константы K и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $n \geq 1$,

$$\sup_{x \in S} E(\tilde{B}_n^\varepsilon | X(0) = x) \leq Kn.$$

Доказательство. Если выбрать ε_0 таким образом, что

$$\mu_0 \square \mu - \varepsilon_0 \inf \{p^-(x) : x \in S\} > \lambda,$$

то понятно, что количество клиентов в P -очереди меньше, чем количество клиентов в очереди $M/M/1$ со интенсивностью прибытия λ и интенсивностью обслуживания μ_0 .

Следовательно, соответствующие периоды занятости сравниваются похожим образом, и этого достаточно, чтобы задать $K=1/(\mu_0-\lambda)$. \square

Очередь с изменяющимся временем обслуживания, описанную выше, будем называть очередью с возмущениями, или, для краткости P -Очередью. Случай с $\varepsilon=0$, очевидно, соответствует S -очереди.

2.2. Добавляемые и компенсирующие отправления

Основная идея анализа возмущений состоит в том, чтобы связать периоды занятости для процессов $(Z(t))$ и $(\tilde{Z}^\varepsilon(t))$ при условии, что процесс прибытия для обеих очередей - N_λ .

Добавляемые отправления. Обозначим через N^+ негомогенный Пуассоновский процесс, интенсивность которого задается следующим образом:

$$t \rightarrow \varepsilon p^+(X(t)).$$

На $(X(t))$ число точек из N^+ на интервале $[a, b]$, $0 \leq a \leq b$, распределено Пуассоновски с параметром

$$\varepsilon \int_a^b p^+(X(s)) ds.$$

Точки из N^+ , обозначенные как $0 < t_1^+ \leq t_2^+ \leq \dots \leq t_n^+ \leq \dots$, называются добавляемыми отправлениями. В частности, распределение расположения t_1^+ , первой точки из N^+ после 0, задано для $x \geq 0$ следующим выражением:

$$P(t_1^+ \geq x) = P(N^+([0, x]) = 0) = E \left(\exp \left(-\varepsilon \int_0^x p^+(X(s)) ds \right) \right). \quad (2)$$

В [10] представлены негомогенные Пуассоновские процессы как вдвойне стохастические Пуассоновские процессы.

Компенсующие отправления. Обозначим через N^- дискретный процесс, полученный прореживанием дискретного процесса N_μ (см. [19]). Он определяется следующим образом: при $s > 0$ точка Пуассоновского процесса N_μ есть точка из N^- с вероятностью $\varepsilon p^-(X(s))/\mu$. Таким образом, N^- есть стационарный дискретный процесс с интенсивностью $\varepsilon p^-(X(s))$. Точка из N^- называется компенсирующим отправлением. Точки дискретного процесса N^- обозначенные как $0 < t_1^- \leq t_2^- \leq \dots \leq t_n^- \leq \dots$ для $x > 0$, определяются из

$$P(t_1^- \geq x) = E \left(\prod_{i=1}^{N_\mu([0, x])} \left(1 - \frac{\varepsilon p^-(X(s_i))}{\mu} \right) \right), \quad (3)$$

где (s_i) есть точки дискретного процесса N_μ .

Учитывая приведенные обозначения, несложно показать, что Марковский процесс $(\tilde{Z}^\varepsilon(t))$ имеет такое же распределение, как и решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{Z}^\varepsilon(t) = dN_\lambda(t) - L_{\{\tilde{Z}^\varepsilon(t^-) > 0\}} d(N_\mu + N^+ - N^-)(t), \quad (4)$$

которое является аналогом уравнения (1) для Р-Очереди.

3. Анализ периода занятости: член первого порядка

Предположим, что период занятости для одного клиента начинается в момент времени 0 в S-Очереди и Р-Очереди. В этом разделе определим первый член степенного ряда по ε , для ожидаемого значения \tilde{V}^ε , означающего продолжительность периода занятости для Р-очереди. Этот вывод позволит в дальнейшем получить часть материала, необходимого для вычисления более сложного второго члена степенного ряда по ε .

Для первого члена необходимо рассмотреть только случай, когда есть только одно добавляемое отправление либо одно компенсирующее отправление. Очевидно, что вероятность того, что оба события произойдут в одном периоде занятости - порядка величины ε^2 , так как интенсивность ассоциированных с ними Пуассоновских процессов пропорциональна ε .

Для $x \geq 1$ предположение стабильности обеспечивает то, что ожидаемые значения периода занятости, начинающего с x клиентов, а именно $E(B_x)$ и $E(\tilde{B}_x^\varepsilon)$, конечны. Если первое добавляющее или компенсирующее отправление таково, что $t_1^+ > \tilde{B}^\varepsilon$ и $t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon$, то $B = \tilde{B}^\varepsilon$. Теперь рассмотрим возможные варианты.

Одно добавляющее отправление. Если есть только одно добавляющее отправление и нет компенсирующего отправления на $(0, \tilde{B}^\varepsilon)$, то в момент \tilde{B}^ε P-очередь пуста, а в S-очереди есть только один клиент (рис. 1).

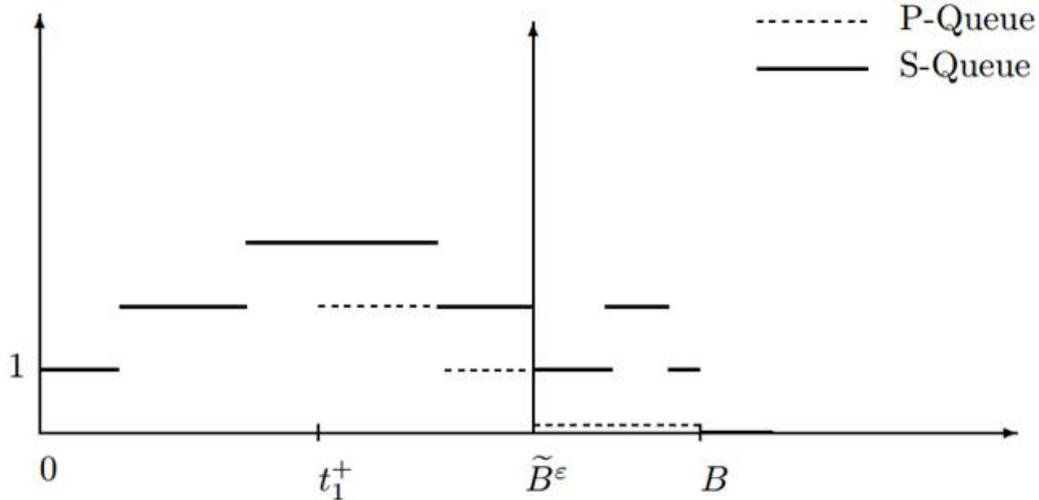


Рис. 1. Период занятости в случае добавляющего отправления

Лемма 2. В случае одиночного отправления

$$E\left((B - \tilde{B}^\varepsilon)L_{\{t_1^+ < B\}}\right) = \varepsilon \frac{E_v \left[p(X(0))^+ \right]}{(\mu - \lambda)^2} + o(\varepsilon), \tag{5}$$

где v есть равновесное распределение окружения $(X(t))$.

Доказательство. Когда есть только одно добавляющее отправление, переменная \tilde{B}^ε находится между t_1^+ и t_1^- . Можно записать

$$E\left((B - \tilde{B}^\varepsilon)L_{\{t_1^+ < B\}}\right) = E\left((B - \tilde{B}^\varepsilon)L_{\{t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_1^-, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon\}}\right) + \Delta, \tag{6}$$

где член, означающий смещение Δ , можно ограничить следующим образом:

$$\Delta \leq E\left(\left|B - \tilde{B}^\varepsilon\right| \left(L_{\{t_2^+ < \tilde{B}^\varepsilon, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon\}} + L_{\{t_1^- \leq \tilde{B}^\varepsilon, t_1^+ \leq \tilde{B}^\varepsilon\}} \right)\right). \tag{7}$$

Оценим первое слагаемое правой части (6). Исходя из уравнения (2) и ограничений для p , получим:

$$P(t_1^+ \leq B) = 1 - E \left(\exp \left(-\varepsilon \int_0^B p^+(X(s)) ds \right) \right) = \varepsilon E \left(\int_0^B p^+(X(s)) ds \right) + o(\varepsilon) = \\ = \varepsilon E(B) E_v(p^+(X(0))) + o(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu - \lambda} E_v(p^+(X(0))) + o(\varepsilon),$$

так как B и $(X(t))$ независимы, и $(X(t))$ - стационарна. В соответствии с сильным Марковским свойством в момент \tilde{B}^ε , условно при возникновении события $\{t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, \tilde{B}^\varepsilon < t_1^-\}$, S-Очередь в момент \tilde{B}^ε начинает независимый период занятости с одним клиентом, и поэтому

$$E \left((B - \tilde{B}^\varepsilon) L_{\{t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon\}} \right) = P(t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon) \times \\ \times E \left((B - \tilde{B}^\varepsilon) | t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon \right) = P(t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon) E(B_1).$$

Таким образом, если $\{t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon\} = \{t_1^+ < B\}$ во время события $\{t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon\}$, то

$$P(t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon) = P(t_1^+ < B) - P(t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon, t_2^+ < \tilde{B}^\varepsilon) - \\ - P(t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon, t_1^- < \tilde{B}^\varepsilon) + P(t_1^+ < \tilde{B}^\varepsilon, t_2^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_2^+, t_1^- < \tilde{B}^\varepsilon) = \\ = P(t_1^+ < B) + o(\varepsilon),$$

так как два или более дополнительных перехода в одном и том же периоде занятости есть $o(\varepsilon)$. Таким же образом, снова используя сильное Марковское свойство, получим следующую оценку

$$E \left(|B - \tilde{B}^\varepsilon| L_{\{t_2^+ < \tilde{B}^\varepsilon, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon\}} \right) \leq \\ \leq \sum_{n \geq 2} E(B_n) P(t_n^+ < \tilde{B}^\varepsilon < t_{n+1}^+, t_1^- > \tilde{B}^\varepsilon) \leq \\ \leq \frac{1}{\mu - \lambda} \sum_{n \geq 2} n P(N^+([0, B]) = n).$$

Действительно, учитывая S-очередь, $N^+([0, B])$ имеет Пуассоновское распределение с параметром $\int_0^B \varepsilon p^+(X(s)) ds$, который подразумевает, что

$$\sum_{n \geq 2} n P(N^+([0, B]) = n) = \\ = E \left(\int_0^B \varepsilon p^+(X(s)) ds \right) - E \left(\int_0^B \varepsilon p^+(X(u)) du \square e^{-\varepsilon \int_0^B p^+(X(s)) ds} \right) = o(\varepsilon)$$

и первый член в правой части неравенства (7) таким образом несущественен в первом порядке по ε .

Для оценки второго члена в правой части неравенства (7), нужно рассмотреть разные возможные варианты расположения точек t_1^+ и t_1^- . При том условии, что t_1^+ и t_1^- происходят в течение $[0, B]$ и $\tilde{B}^\varepsilon \geq B$, в момент времени B Р-Очередь содержит не более $p \geq 0$ клиентов, если было $p+1$ компенсирующих отправлений. Если $D([0, B])$ есть число клиентов на протяжении периода занятости S-Очереди, тогда

$$\begin{aligned} & E \left((\tilde{B}^\varepsilon - B) L_{\{\tilde{B}^\varepsilon \geq B, t_1^+ < B, t_1^- < B\}} \right) \leq \\ & \leq E \left(E_{X(B)} \left(B_{D([0, B])} \right) \right) P \left(t_1^- < B, t_1^+ \leq B \leq t_2^+ \right) \leq \\ & \leq KE \left(D([0, B]) \right) = P \left(t_1^- < B, t_1^+ \leq B \leq t_2^+ \right) = o(\varepsilon), \end{aligned}$$

в соответствии с Утверждением 1. С другой стороны,

$$E \left(\left| \tilde{B}^\varepsilon - B \right| L_{\{\tilde{B}^\varepsilon \geq B, t_1^+ \leq B, t_1^- \leq B\}} \right) \leq E \left(B L_{\{t_1^+ \leq B, t_1^- \leq B\}} \right) = o(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$E \left(\left| \tilde{B}^\varepsilon - B \right| L_{\{t_1^+ \leq \tilde{B}^\varepsilon, t_1^- \leq \tilde{B}^\varepsilon\}} \right) \leq E \left(\left| \tilde{B}^\varepsilon - B \right| L_{\{t_1^+ \leq B, t_1^- \leq B\}} \right) + E \left(B L_{\{t_1^- \leq B, B \leq t_1^+ \leq \tilde{B}^\varepsilon\}} \right),$$

Следовательно, последний член равен $o(\varepsilon)$.

Таким образом, делаем вывод, что $\Delta = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя уравнение (6), получаем ожидаемый результат. \square

Оценка правой части уравнения (6) может оказаться достаточно громоздкой. Однако, стоит отметить, что окружение $(X(t))$ Р-очереди порождает новые зависимости, которые нужно исследовать. Именно поэтому в работе точно описаны условия, при которых сильное Марковское свойство используется для получения члена первого порядка.

Единственное компенсирующее отправление. Теперь предположим, что есть только одно компенсирующее отправление, то есть отправление для S-Очереди компенсируется для Р-Очереди, и не происходит дополнительных переходов на протяжении периода занятости S-очереди. В этом случае, при окончании периода занятости S-очереди, в момент времени B , в Р-очереди появляется один клиент и поэтому начинается период занятости. При условии, что более нет компенсирующих и дополнительных отправлений на протяжении $(B, \tilde{B}^\varepsilon)$ в Р-Очереди, тогда разница между обоими периодами занятости имеет распределение, похожее на длительность B_1 для стандартного периода занятости (рис. 2)

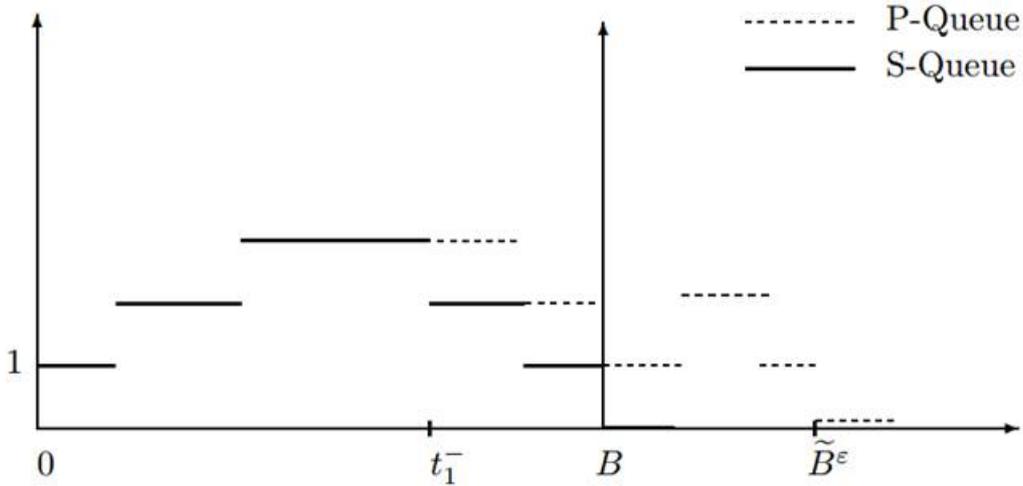


Рис. 2. Период занятости в случае компенсирующего отправления.

Лемма 3. В случае единственного компенсирующего отправления, получим

$$E\left((\tilde{B}^\varepsilon - B)L_{\{t_1^- < B\}}\right) = \varepsilon \frac{E_v(p^-(X(0)))}{(\mu - \lambda)^2} + o(\varepsilon). \quad (8)$$

Доказательство. Используя те же аргументы, что и ранее, получим

$$\begin{aligned} E\left((\tilde{B}^\varepsilon - B)L_{\{t_1^- < B\}}\right) &= \\ &= E\left(B_1 L_{\{t_1^- < B, B+B_1 < \min(t_1^+, t_2^+)\}}\right) + o(\varepsilon) = E(B_1)P(t_1^- \leq B) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Для оценки $P(t_1^- \leq B)$ обозначим через (D_i) последовательность периодов отправлений в S-очереди, и через N - число клиентов, обслуженных за период занятости длиной B . Тогда из уравнения (3) получим тождество

$$\begin{aligned} &= P(t_1^- \leq B) = E\left(\sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon p^-(X(D_i))}{\mu} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{\varepsilon p^-(X(D_j))}{\mu}\right)\right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{\mu} E\left(\sum_{i=1}^N p^-(X(D_i))\right) + o(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu} E(N)E(p^-(X(D_i))) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

учитывая стационарность $(X(t))$ и тождество Вальда. Так как $E(N) = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$, получаем уравнение (8). \square

В выражении для периода занятости для P-очереди, член ε задается двумя событиями, состоящими из единственного компенсирующего отправления или единственного добавляющего отправления на протяжении периода занятости S-очереди. Следующее утверждение следует из уравнений (5) и (8).

Утверждение 4 (Выражение первого порядка).

$$E(\tilde{B}^\varepsilon) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \varepsilon \frac{E_v(p(X(0)))}{(\mu - \lambda)^2} + o(\varepsilon). \quad (9)$$

Уравнение (9) соответствует аппроксимации сокращенного времени обслуживания (RSR). Будем считать, что система работает так, как будто мы имеем классическую очередь M/M/1 со интенсивностью обслуживания $\mu + \varepsilon E_v(p(X(0)))$ и интенсивностью поступления клиентов λ . Для этой очереди средняя продолжительность периода занятости задается следующим образом:

$$\frac{1}{\mu + \varepsilon E_v(p(X(0))) - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \varepsilon \frac{E_v(p(X(0)))}{(\mu - \lambda)^2} + o(\varepsilon).$$

что совпадает с уравнением (9). В дальнейших исследованиях мы изучим компоненту второго порядка и покажем, что RSR-аппроксимация неприменима.

Заключение

Взаимодействие эластичного и неэластичного трафика в линии передачи телекоммуникационной сети породило изучение воздействия небольших изменений скорости обслуживания на период занятости очереди M/M/1. Изменение скорости обслуживания зависит от независимого стационарного процесса $(X(t))$ и определяется значением параметра $\varepsilon \ll 1$. Вычислены два первых члена разложения степенного ряда по ε , определяющего среднее значение продолжительности периода занятости. Это позволило изучить применимость аппроксимации сокращенного времени обслуживания (RSR), которая заключается в сравнении очереди с возмущениями M/M/1 и классической очереди M/M/1, для которой интенсивность обслуживания постоянна и эквивалентна среднему значению возмущений. Для первого члена разложения обе системы эквивалентны. Для второго порядка, ситуация более сложная, и показано, что корреляции процесса окружения $(X(t))$ играют ключевую роль.

Библиографический список

1. Agrawal R., Makowski A.M., Nain P. On a reduced load equivalence for fluid queues under subexponentiality// *Queueing Systems. Theory and Applications* 33 (1999), no. 1-3, 5–41.
2. Altman E., Avrachenkov K., Nunez-Queija R. Perturbation analysis for denumerable Markov chains with application to queuing models// *Advances in Applied Probability* 36 (2004), no. 3, 839–853.
3. Antunes N., Fricker C., Guillemin F., Robert P. Integration of streaming services and TCP data transmission in the Internet// *Performance'05 (Juan les Pins)*, IFP WG 7.3, 2005.
4. Barabanov V.F., Kravets O.Ja., Kryuchkova I.N., Makarov O.Yu., Pogodayev A.K., Choporov O.N. Discrete Processes Dynamics Neural Network Simulation Based on Multivariate Time Series Analysis with Significant Factors Delayed Influence Consideration // *World Applied Sciences Journal* 23 (9): 1239-1244, 2013.

5. Beletskaya S.Yu., Zolnikov V.K., Kravets O.Ja., Lapshina M.L., Podvalny E.S. Specific Features of Modeling and Developing the Mathematical and Program Software for Designing Intranet-Interfaces during Competitive Development of Information Systems // World Applied Sciences Journal 23 (12): 64-70, 2013.
6. Boxma O.J., Kurkova I.A. The M/M/1 queue in a heavy-tailed random environment// Journal of the Netherlands Society for Statistics and Operations Research 54 (2000), no. 2, 221–236.
7. Delcoigne F., Proutiere A., Regnie G. Modeling integration of streaming and data traffic. - ITC specialist seminar on IP traffic (Wurzburg, Germany), July 2002.
8. Fricker C., Guillemin F., Robert P. Perturbation analysis of an M/M/1 queue in a diffusion random environment, preprint. January 2004.
9. Govorskii A.E., Kravets O.Ja. Mathematical Modeling of Inhomogeneous Traffic in a Heterogeneous Integrated Corporate Data Control Systems // Automation and Remote Control, Vol. 73, No. 7, 2012. – P. 1269-1278.
10. Grandell J. Point processes and random measures// Advances in Applied Probability 9 (1977), 502–526.
11. Jelenkovic P., Momcilovic P. Resource sharing with subexponential distributions// Infocom'2002 (New York), June 2002.
12. Kravets O.Ja. Mathematical Modeling of Parametrized TCP Protocol // Automation and Remote Control, Vol. 74, No. 7, 2013. – P. 1218-1224.
13. Kravets O.Y., Makarov O.Y., Oleinikova S.A., Pitolin V.M., Choporov O.N. Switching subsystems within the framework of distributed operational annunciator and monitoring systems: program design features// Automation and Remote Control. 2013. T. 74. № 11. С. 1919-1925.
14. Kravets O.Ya., Makarov O.Yu., Oleinikova S.A., Pitolin V.M., Choporov O.N. Switching subsystems within the framework of distributed operational annunciator and monitoring systems: program design features // Automation and Remote Control, Vol. 74, No. 11, 2013. – P. 1919-1925.
15. Massoulié L., Roberts J. Bandwidth sharing: Objectives and algorithms// INFOCOM '99. Eighteenth Annual Joint Conf. of the IEEE Computer and Communications Societies, 1999, p. 1395–1403.
16. Nunez-Queija R. Sojourn times in a processor sharing queue with service interruptions// Queuing Systems 34 (2000), 351–386.
17. Nunez-Queija R. Sojourn times in non-homogeneous QBD processes with processor sharing// Stochastic Models (2001), 61–92.
18. Nunez-Queija R., Boxma O.J. Analysis of a multi-server queuing model of ABR// J. Appl. Math. Stoch. An. 11 (1998), 339–354.
19. Robert P. Stochastic networks and queues// Stochastic Modeling and Applied Probability Series, vol. 52, Springer, New-York, June 2003.

}} Thoai An Nguyen

}} **Investigation of systems with nonstationary parameters of queue of M/M/1**

}} **Abstract.** Investigation of systems with nonstationary parameters of queue of M/M/1 discussed in this article.

}} **Keywords:** Nonstationary parameters, queue, traffic

УДК 519.688

Н.А. Тярт

ФГБОУ ВПО, «Рязанский государственный радиотехнический университет», Рязань, Россия

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА СОРТИРОВКИ В ЗАДАЧЕ СОСТАВЛЕНИЯ РЕЙТИНГА ОБЪЕКТОВ С ПРОТИВОРЕЧИВЫМИ ЭКСПЕРТНЫМИ ОЦЕНКАМИ

Аннотация. Рассматриваются особенности алгоритма сортировки объектов для автоматизации процедуры составления их рейтинга на основе противоречивых экспертных оценок.

Ключевые слова: Сортировка, объект, рейтинг, противоречивые экспертные оценки.

Качественное решение задачи автоматизации процедуры сортировки объектов играет важную роль при составлении их рейтинга на основе экспертных оценок, выставленных группой экспертов. Пусть каждый объект оценивается каждым экспертом по некоторому набору критериев. Оценки, выставленные экспертами, могут не совпадать и даже противоречить друг другу. Для составления рейтинга таких объектов целесообразно использование инструментария теории мультимножеств, позволяющего учесть при составлении рейтинга все, в том числе и противоречивые экспертные оценки.

Для составления рейтинга использован подход, предложенный д.т.н., академиком РАЕН А.Б. Петровским [1]. Идея этого подхода заключается в сравнении каждого объекта с наилучшим (или наихудшим) вариантом оценки – «идеальным» («антиидеальным») объектом. Пусть при сравнении двух объектов между собой лучше тот, что ближе к наилучшему («идеальному») объекту. В этом случае условие превосходства объекта A_i над объектом A_j формулируется как [1]:

$$\sum_{s=1}^m w_s k_{A_i}(q_s^1) > \sum_{s=1}^m w_s k_{A_j}(q_s^1),$$

где A_i и A_j – объекты для сравнения; m – количество критериев оценки; w_s – весовой коэффициент s -ой оценки; q_s^1 – максимальная (1-я) оценка по данной шкале оценки по критерию s ; $k_{A_i}(q_s^1)$ – количество экспертов, давших оценку q_s^1 данному объекту A_i .

Для реализации такого подхода к упорядочению объектов необходимо рассчитать суммы оценок по каждой из градаций шкалы оценки от q^1 до q^n при использовании шкалы оценки с разницей между максимальным и

минимальным значениями в $(n - 1)$ баллов. Если суммы по q^1 данных объектов равны, следует перейти к расчету сумм по q^2 и так далее до q^n .

Для программной реализации алгоритма составления рейтинга была использована среда *Visual Basic for Applications*, поскольку исходные данные были записаны в рабочую книгу *MS Excel* [2]. На рис. 1 представлена обобщенная схема алгоритма работы программы. В качестве настраиваемых при работе программы параметров могут быть использованы: диапазон листов (объектов) для анализа; диапазон ячеек (как области критериев оценки и экспертов); шкала оценивания; место для вывода рейтинга (номер листа).

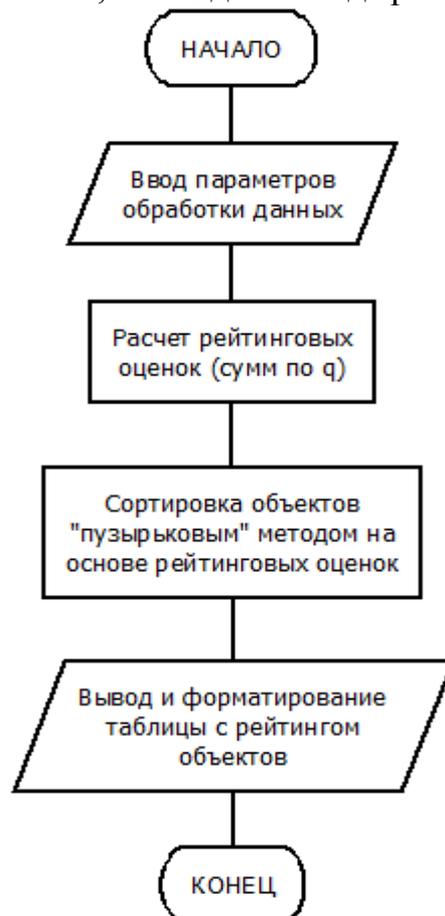


Рис. 1. Обобщенная схема алгоритма

Пусть значения оценок объектов по критериям имеются в наличии и корректно расположены на листах рабочей книги, а все настраиваемые параметры введены пользователем в начале работы программы. При запуске процесса составления рейтинга программа сначала рассчитывает суммы по q от q^1 до q^n – рейтинговые оценки, а затем в цикле проходит по всем указанным листам (объектам) и составляет на них таблицы с рейтинговыми оценками. Для этого используются еще 2 вложенных цикла: внешний по шкале оценивания, вложенный по указанному диапазону ячеек. Накоплением значений в этой структуре циклов получают данные рейтинговых оценок (рис. 2). При этом возможен учет весовых коэффициентов значимости для

каждого критерия. В итоге программа создает новый лист рабочей книги для расположения на нем рейтинга объектов.

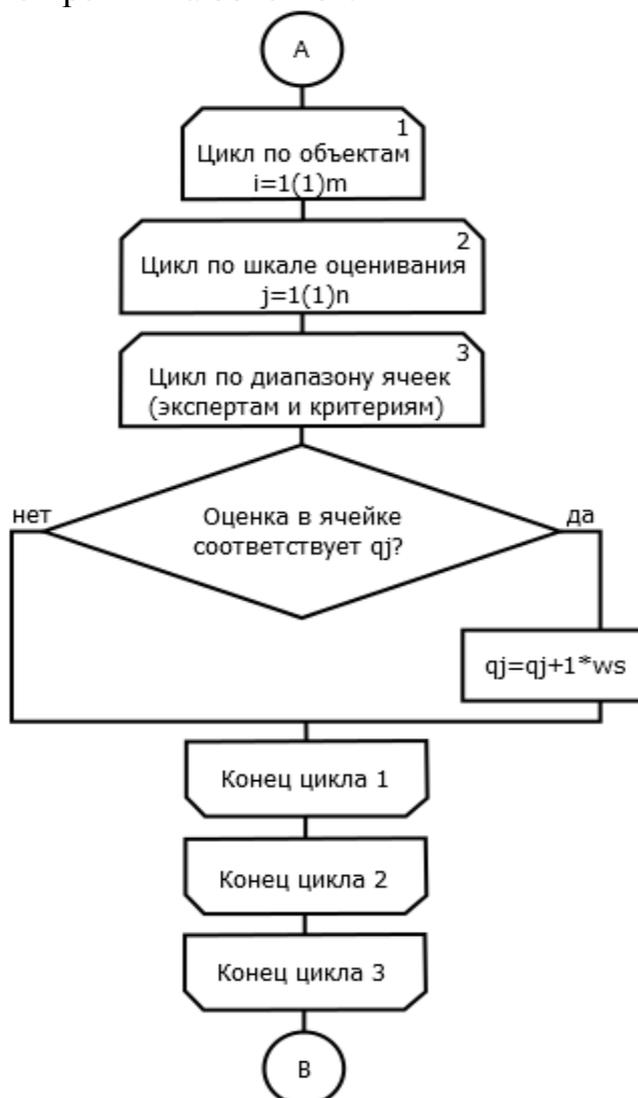


Рис. 2. Расчет рейтинговых сумм

Далее в массив записывается естественная последовательность объектов (расположение их листов в рабочей книге) как начальное значение рейтингового списка. После этого программа начинает сортировать список «пузырьковым» методом. Для этого используются 3 вложенных друг в друга цикла: цикл с постусловием для самой сортировки и расположенные внутри него 2 цикла с параметром: цикл по листам от 1 до $(n - 1)$, а в нем цикл по частям рейтинговых оценок (суммам по q). В последнем по вложенности цикле сравниваются 2 соседних листа (объекта) и принимается решение о необходимости перестановки их местами в рейтинговом списке.

Рассмотрим подробнее эту часть алгоритма. Внешним является цикл с постусловием. В начале каждой итерации логической переменной – индикатору присваивается значение «истина». Это значит, что в текущей итерации еще не совершалось перестановок объектов. Затем идет обработка

данных. Условием завершения цикла является значение «истина» индикатора. В цикл с постусловием вложены 2 цикла с параметром. Внешний – по объектам, в нем программа проходит по всем парам соседних объектов от 1-го и 2-го до $(n - 1)$ -го и n -го. Соответственно имеют место быть $(n-1)$ проходов по этому циклу. Внутренний цикл – по рейтинговым суммам. Здесь сравниваются соответствующие суммы двух соседних объектов и принимается решение – переставить местами объекты или нет. Делается это двумя отдельными операторами выбора. Если i -й объект лучше $(i+1)$ -го по текущей сумме, то перестановка не требуется, и цикл по суммам прерывается. Если, наоборот, совершается перестановка, индикатору присваивается значение «ложь» и цикл по суммам опять же прерывается. В случае, когда текущие рейтинговые суммы равны, начинается новая итерация цикла по суммам со следующими значениями. В результате формируется массив, содержащий последовательность индексов листов в соответствии с порядком рейтинга. Далее программа выводит на лист рейтинга данные об объектах с первого по последнее место. Здесь возможен вывод дополнительной информации для сравнения, например, первых пяти сумм по q от q^1 до q^5 . После этого программа переносит лист рейтинга в начало рабочей книги.

Рассмотренный подход к составлению рейтингов находит применение при решении широкого спектра прикладных задач, в частности, при решении задач составления рейтинга инвестиционных проектов [3 – 5], конкурсных заявок, претендентов на вакантные должности.

Библиографический список

1. Петровский, А.Б. Упорядочение и классификация объектов с противоречивыми признаками // Новости искусственного интеллекта. 2003. № 4. С.34-43.
2. Демидова Л.А., Пылькин А.Н. Программирование в среде Visual Basic for Applications: Практикум. М.: Горячая линия – Телеком. 2004. 175 с.
3. Гусева М.В., Демидова Л.А. Классификация инвестиционных проектов на основе систем нечеткого вывода и мультимножеств // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2006. № 19. С. 157-165.
4. Демидова Л.А. Классификация инвестиционных проектов на основе мультимножеств и нечеткой кластеризации // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2006. Т. 70. № 15. С. 72-79.
5. Демидова Л.А., Соколова Ю.С. Лингвистический подход к задаче классификации конкурсных проектов с применением инструментария теории мультимножеств // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 50-1. С. 109-117.

~ N.A. Tyart

~ **Realization features of sorting algorithm in a problem of drawing up a rating of objects with contradictory expert estimates**

~ **Abstract.** Features of objects' sorting algorithm for procedure automation of drawing up their rating on the base of contradictory expert estimates are considered.

~ **Keywords:** Sorting, object, rating, contradictory expert estimates.

* - Технологический университет, г. Хо Ши Мин, Вьетнам

** - Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

ЧИСЛЕННАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ АГЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАДАНИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО МЕЖМОДУЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Аннотация. Рассмотрены особенности численной верификации агентного управления заданиями для систем распределенного межмодульного взаимодействия.

Ключевые слова: Агентное управление, верификация, межмодульное взаимодействие

1. Введение

Большинство схем балансировки загрузки основано при условии, что все процессоры в распределенной вычислительной системе (РВС) имеют сходную мощность обработки и рабочую загрузку. Однако, поскольку технология продолжает продвигаться, сеть стала содержать больше процессоров различной возможности и конфигурации. Предложенный авторами [8] метод балансировки загрузки основан на Агентном управлении заданиями (АУЗ), инструменте, первоначально используемом в реализациях взаимного исключения и назначения арбитра. Опишем, как специфические свойства АУЗ позволяют создать алгоритм, который может быть приспособлен к возможностям индивидуальных узлов в связанной сети. В целом, если каждый процессор связывается только с подмножеством других процессоров в сети, то трафик сообщений остается относительно низким. АУЗ позволяет создать эти подмножества согласно более корректному методу - который лучше учитывает потребности изменения характеристик сети. Метод будет всегда выполнять перемещение задачи всякий раз, когда есть возможность, то есть, если, по крайней мере, есть один недогруженный процессор и, по крайней мере, один перегруженный процессор в сети, перемещение задачи произойдет.

Основные алгоритмы рассмотрены в [11].

2. Имитационная модель и исходные данные

В этом разделе представлены исходные данные, подаваемые на вход имитационной модели, и допущения. Процессоры в моделируемой РВС представлены как очередь в виде СМО М/М/1. Поскольку каждая задача в

системе представлена в процессоре, это определяет наличие распределяющей очереди процессора (рис. 1).

Задачи, которые намечены на выполнение в ближайшее время, входят в активную очередь так же, как и задачи, которые были перенесены от других процессоров. Задачи, которые входят в активную очередь, не имеют права на перемещение; это гарантирует, что задачи не будут неоднократно безуспешно перемещаться. Совместно распределяющая и активная очереди формируют очередь ожидания. Первая задача в активной очереди обозначена как выполняющаяся задача. Задача перемещается от распределяющей очереди к активной очереди только тогда, когда активная очередь становится пустой.

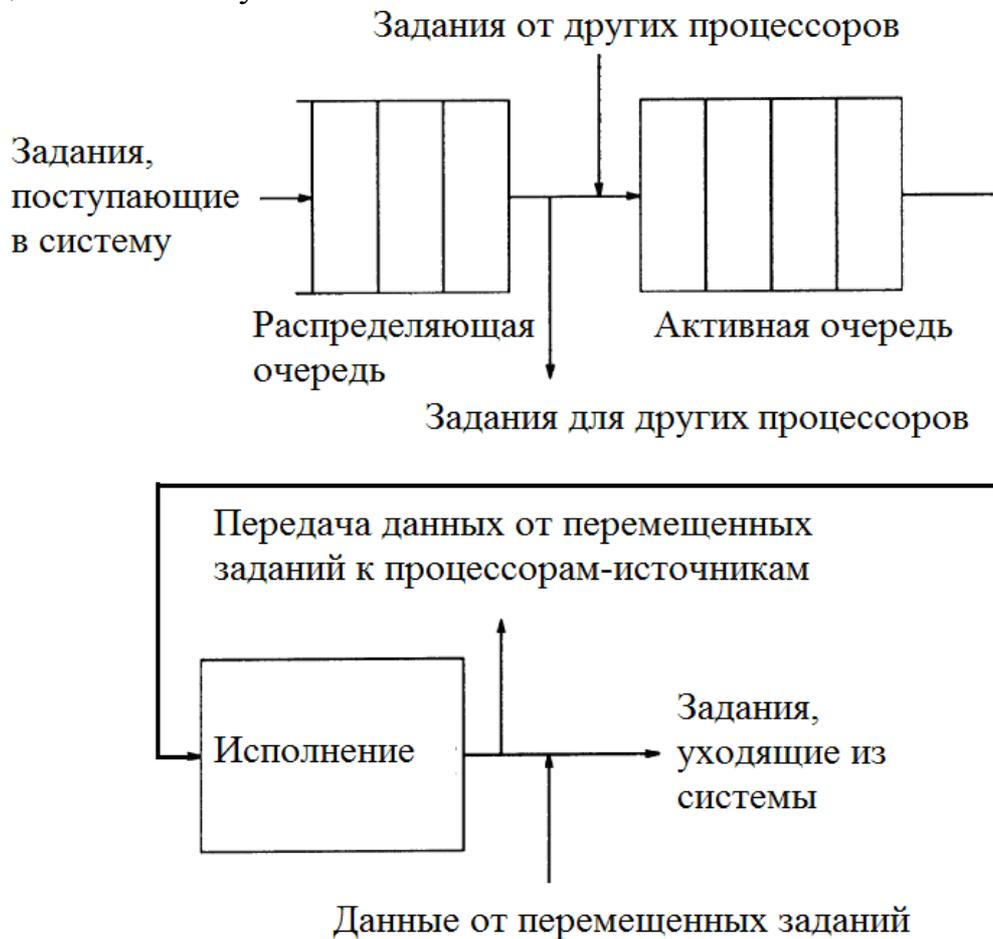


Рис. 1. Имитационная модель очереди

Считаем, что генерация задач в процессоре P_i – Пуассоновский процесс со средней частотой генерации R_i ; эта частота независима от частот других процессоров. Обозначим интенсивность поступления задач R , где $R = \sum_{i=0}^{N-1} R_i$, и N - общее количество процессоров в системе. Предполагаем, что размеры очередей в каждом процессоре неограниченны.

Времена передачи для сообщений Migrate и Answer принимаются равными двум единицам. Все другие сообщения требуют одну единицу времени. Это учитывает тот факт, что перемещение задачи и возврат результатов будут требовать подробной информации, которая будет послана. Среднее время завершения для задач - 13 единиц [4].

Пусть W - число задач в очереди ожидания процессора; это - оценка текущей загрузки того процессора. Пусть L_{\max} (N_{\max}) - верхний порог числа ждущих задач, при которых процессор рассматривается, как недогруженный. Другими словами, процессор будет рассматриваться как недогруженный, если $W < L_{\max}$, нормально загружен если $L_{\max} < W < N_{\max}$, и перегружен если $N_{\max} < W$. Доступная загрузка в процессоре может быть определена как $N_{\max} - W - 1$; 1 вычитается от $N_{\max} - W$, чтобы объяснить факт, что задача может присутствовать, в то время как процессор ждет ответ. Принимаем $L_{\max} = 1$ и $N_{\max} = 3$. Эти пороги также идентичны данным в [4], чтобы результаты могли корректно сравниваться.

За исключением системного размера, параметры моделирования, выбранные для этого этапа, соответствуют принятым в [0]. Это позволяет более точно сравнивать результаты работы алгоритмов. В [0] представлены результаты сравнения алгоритма Суена с алгоритмами Ни и др. [2] и Риоу [3]. В [0] отмечено, что алгоритм Суена использует приблизительно на 60% меньше сообщений, чем алгоритм Ни, и приблизительно на 50% меньше сообщений, чем алгоритм Риоу. Алгоритм Суена также обеспечивает небольшое улучшение времени ответа по сравнению с другими методами. С целью сравнения результаты по всем этим методам приведены в графиках, представленные в этом разделе.

Мы ожидаем, что наш метод будет использовать чуть большее количество полных сообщений, чем алгоритм Суена; их метод использует минимальные SendingSets и ReceivingSets полного размера. Если бы использовались меньшие наборы, было бы невозможно определить перекрестное свойство, без которого мы были бы неспособны доказать теорему 1 [8] (перемещение задачи произойдет всякий раз, когда это возможно). Так как SendingSets и ReceivingSets могут быть большими, чем \sqrt{N} в нашей схеме, сообщения о загрузке и сообщения Request могут в общем случае быть посланными большему числу наборов процессоров.

3. Результаты моделирования

Сначала моделирование проводится на сети из 7 процессоров с оценкой мощности и оценках потребности, приведенными в табл. 1. Фактическая мощность и оценки потребности должны учесть внимание много факторов, некоторые из которых весьма специфические для определенных сетей.

Табл. 2 содержит SendingSet и ReceivingSet назначения, полученные алгоритмом, представленным в [11]. Процессоры A и G менялись, чтобы создать неустойчивость оценки мощности среди SendingSets. Видно, что

процессор Е с оценкой потребности 25, имеет SendingSet, в котором процессоры (кроме него самого) имеют полную оценку мощности 31 (от процессоров А, В, и С). Эти отношения соблюдаются для всех процессоров: SendingSet каждого процессора содержит процессоры с полной оценкой мощности, которая имеет по крайней мере такое же значение, как и оценка потребности процессора. Табл. 2 также иллюстрирует тенденцию для более (менее) мощных процессоров иметь больший (меньший) ReceivingSets. Мощные процессоры увеличивают полные оценки мощности кворумальных наборов, в которых они постоянно находятся, делая такой кворумальный набор более вероятным, чтобы быть назначенным на другие процессоры. Следовательно, мощные процессоры имеют тенденцию появляться в больших SendingSets процессоров, и вероятно, в больших ReceivingSets.

Таблица 1

Мощность и оценка потребности для системы с N=7

Процессор	Мощность	Оценка потребности
A	12	14
B	10	6
C	9	17
D	7	12
E	5	25
F	4	25
G	2	18

Таблица 2

Множества, сгенерированные новым алгоритмом для N=7

Процессор	SendingSet	ReceivingSet
A	A,D,E,G	A,E,F
B	B,E,G	B,C,D,E,F,G
C	B,C,D	C,E,F,G
D	B,D,G	A,C,D
E	A,B,C,E	A,B,E
F	A,B,C,F	F
G	B,C,G	A,B,D,G

На рис. 2 приведены данные по сравнению числа сообщений об изменении загрузки, требуемых каждым алгоритмом на нескольких уровнях загрузок. Предложенная нами схема требует приблизительно на 23% больше сообщений об изменении загрузки, чем алгоритм Суена. Это в значительной степени объясняется различиями в размерах SendingSets. Рассмотрим, например, SendingSet процессора А. Он содержит три входа, что не соответствуют процессору А. Поэтому сообщения об изменении загрузки посланы А, но с необходимостью быть посланными трем процессорам. Общее количество таких процессоров во всем SendingSets - 17.

Напротив, алгоритм Суена создает SendingSets (и ReceivingSets) однородного размера, как показано в табл. 3. Каждый SendingSet содержит два процессора, которым должны быть посланы сообщения. Поэтому общее

количество - 14 процессоров. Различие между этими двумя общими количествами - $3/14$, или приблизительно 21%.

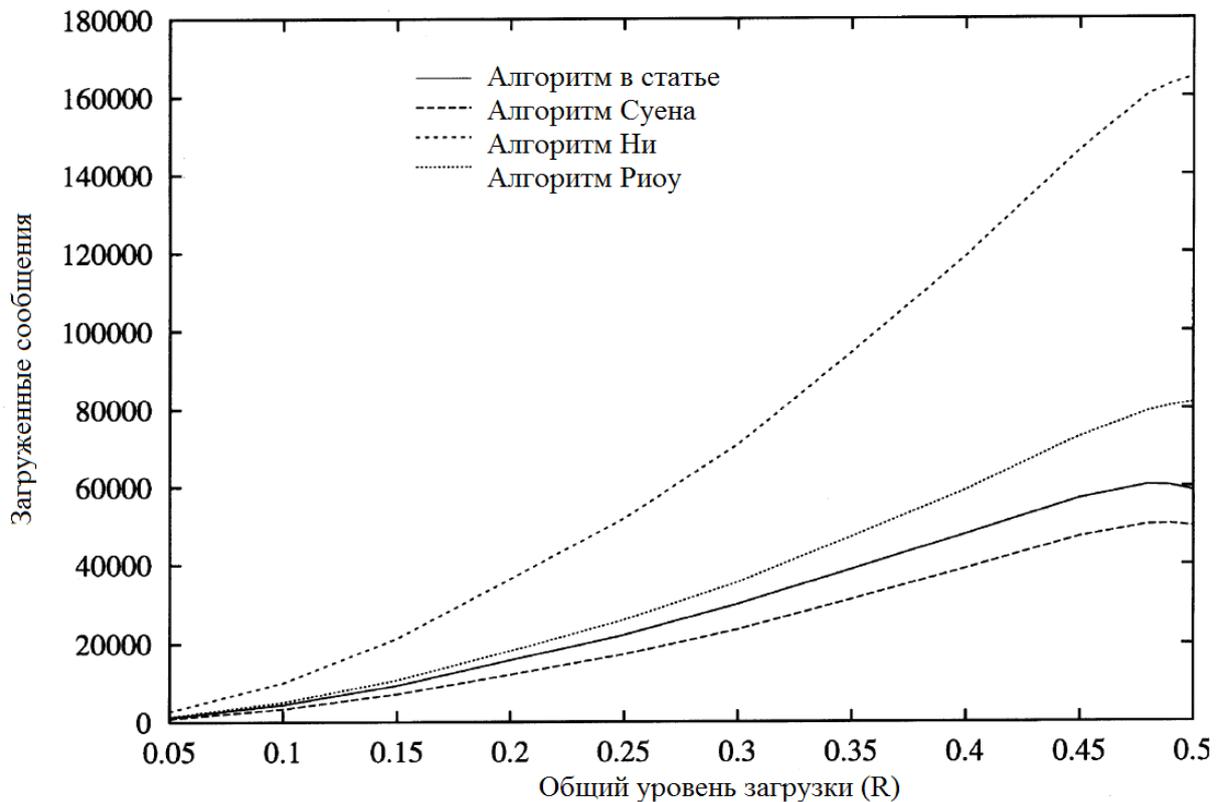


Рис. 2. Посылка сообщений о загрузке, 50000 единиц времени ($N=7$)

Таблица 3

Наборы, сгенерированные алгоритмом Суена для $N=7$

Процессор	SendingSet	ReceivingSet
A	A,B,C	A,D,F
B	B,D,G	A,B,E
C	C,D,F	A,C,G
D	A,D,E	B,C,D
E	B,E,F	D,E,G
F	A,F,G	C,E,F
G	C,E,G	B,F,G

Рис. 3 сравнивает общее количество сообщений, представленных каждым методом. Различие здесь меньше, приблизительно 16%. Фактически, доля сообщения не об изменении загрузки отличается меньше чем на 4%, что подразумевает, что количество таких сообщений менее зависят от размеров SendingSet и ReceivingSet. Так как протокол будет всегда перемещать задачи, когда это возможно, число сообщений Migrate и Answer [11] практически не меняется. Хотя сообщения Answer могут в среднем быть посланы большому количеству процессоров, чем в алгоритме Суена, такое увеличение в значительной степени компенсируется уменьшением числа сообщений

Available. Количество сообщений Available меньше, потому что они не так часто должны отправляться. Наш метод более точен в размещении необходимых процессоров в ReceivingSets мощных процессоров, и таким образом устанавливает процессоры так, что сообщения Available, вероятно, будут посланы непосредственно перегруженным процессорам, нежели чем на промежуточные процессоры. Также менее вероятно, что сообщения Cancel и TooLate будут сформированы, так как сообщения Request и Available выполняют их задачи более часто.

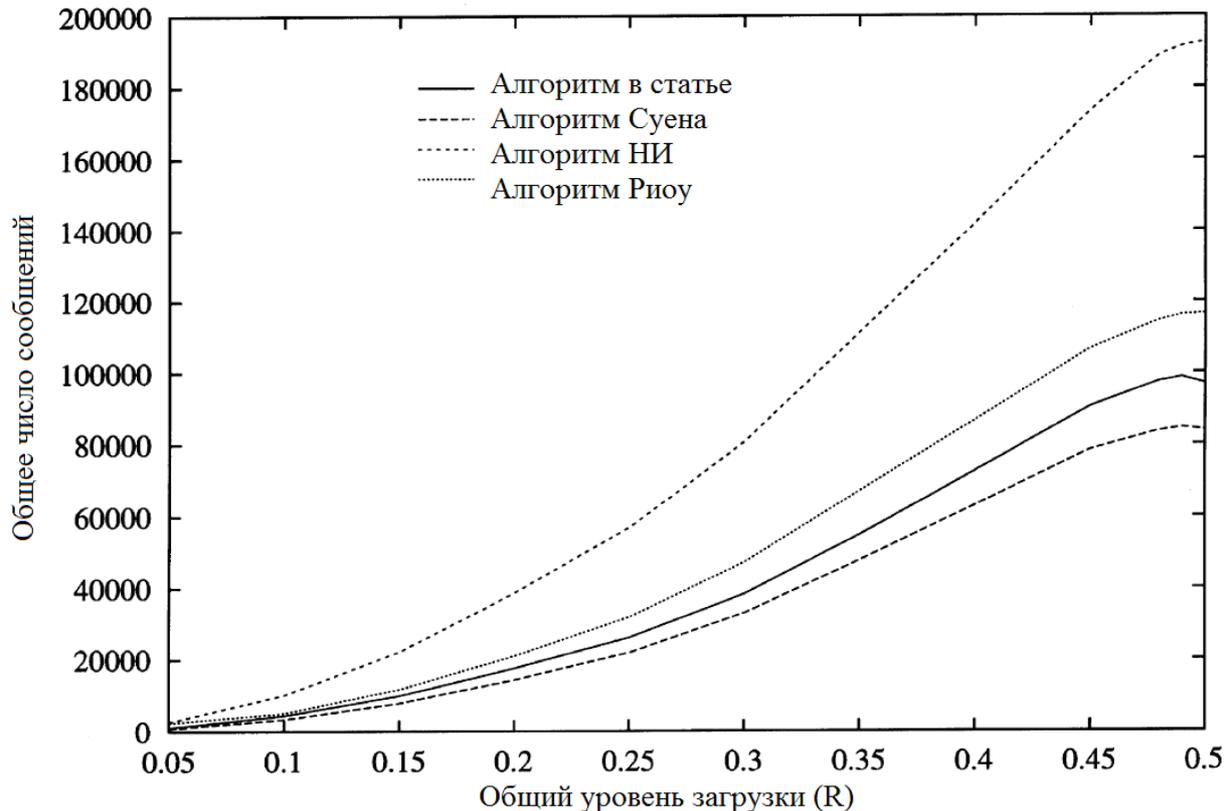
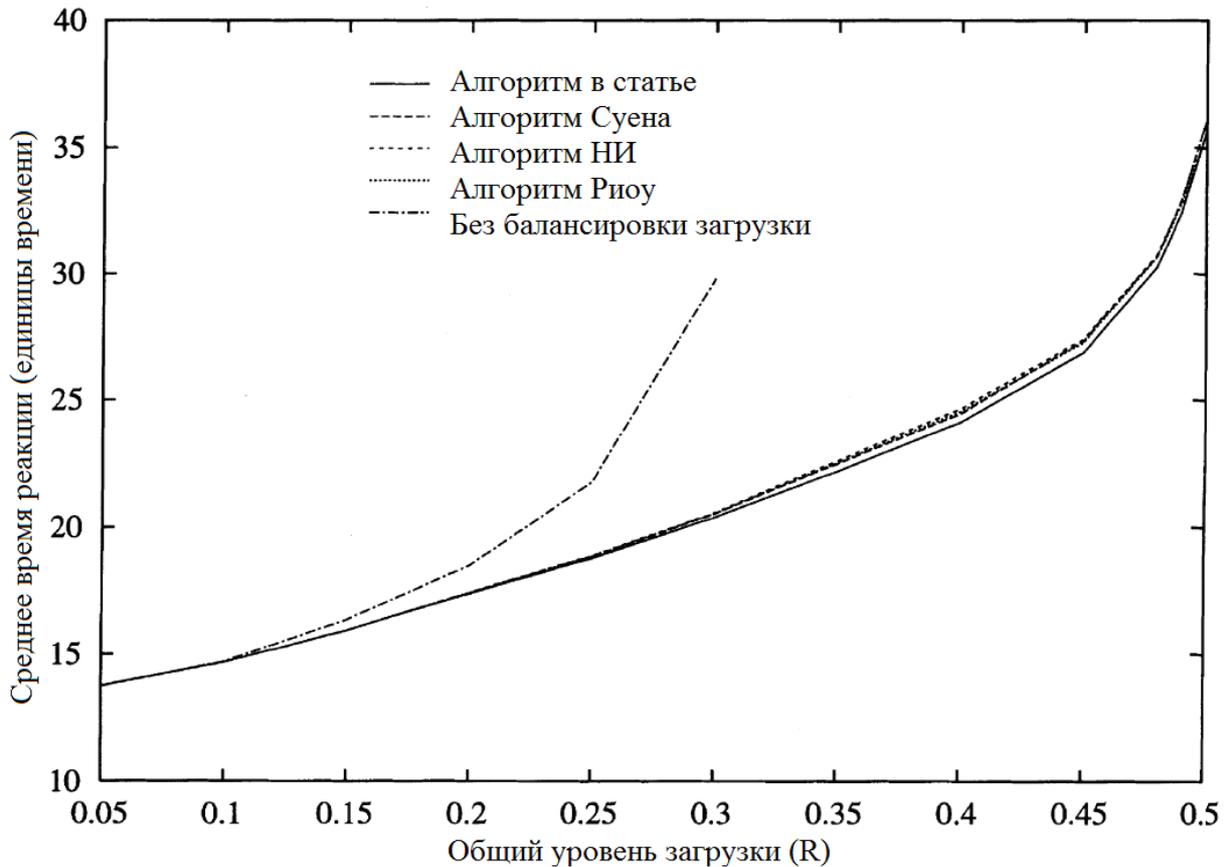


Рис. 3. Посылка всех сообщений, 50000 единиц времени для N=7

Среднее время ответа из этих двух алгоритмов приведено на рис. 8 и имеет лишь незначительные отличия. Для недогруженных систем времена ответа почти идентичны. Для более перегруженных систем наш алгоритм немного превосходит по быстродействию метод Суена. Это связано с тем, что более медленные процессоры главным образом ответственны за обработку меньшего количества сообщений в нашем методе. Более быстрые процессоры, вероятно, будут в большем количестве SendingSets, и таким образом более вероятно, чтобы они получают сообщения об изменении загрузки. Эти процессоры лучше оборудованы, чтобы обработать дополнительный поток, и таким образом, способны освободить более медленные процессоры, чтобы закончить назначенные им задачи.

Рис. 4. Среднее время отклика для $N=7$

Метод Суена лучше подходит для сетей определенных размеров. В частности, N должно быть выражено как $k(k-1)+1$, где $k-1$ - простое числа. Если это не так, созданные *SendingSets* имеют тенденцию к увеличению. Например, рассмотрим новую систему с 8 процессорами. Алгоритм Суена порождает *SendingSets* и *ReceivingSets* так, как показано в табл. 4. Табл. 5 демонстрирует мощность и оценки потребности, которые могли бы быть назначены на эти процессоры, и табл. 6 демонстрирует соответствующие *SendingSets* и *ReceivingSets*.

Таблица 4
Множества, сгенерированные алгоритмом Суена для $N=8$

Процессор	SendigSet	ReceivingSet
A	A,B,C,D	A,E,H
B	B,E,F,H	A,B,F,G
C	C,D,F,H	A,C
D	D,F,G	A,C,D,G
E	A,E,F,G	B,E,F
F	B,E,F,H	B,C,D,E,F
G	B,D,G	D,E,G,H
H	A,G,H	B,C,F,H

Таблица 5
Мощность и оценка потребности для системы с N=7

Процессор	Мощность	Оценка потребности
A	14	23
B	10	15
C	8	7
D	6	31
E	4	22
F	3	23
G	2	23
H	1	17

Таблица 6
Множества, сгенерированные новым алгоритмом для системы с N=8

Процессор	SendingSet	ReceivingSet
A	A,B,C,E,G	A,D
B	B,C,E,F	A,B,D,E,F,G,H
C	C,D,H	A,B,C,D,E,F,G,H
D	A,B,C,D	C,D,E,F,G
E	B,C,D,E	A,B,E
F	B,C,D,F	B,F
G	B,C,D,G	A,G
H	B,C,H	C,H

Алгоритм Суена (табл. 4) создает такой SendingSets, что 21 вход будет требовать отправки сообщений к ним. Наш метод создает SendingSets с 23 такими входами. Различие - приблизительно 9.5%. Это изменение представлено в результатах, показанных в рис. 5. Для системы с N=8 новый метод требует большего количества сообщений приблизительно на 16%. Различие в сообщениях о сохранении загрузки – незначительное, 0.39% (рис. 6). Среднее время ответа для этих двух методов является все еще очень близким (рис. 7).

Новый метод превосходит по быстродействию старый для значений R порядка 0.25 и более. Алгоритм превосходит по быстродействию алгоритмы Ни и Риоу для разумных структур АУЗ. АУЗ широко изменяются по составу, но наш метод пытается использовать самый маленький SendingSets, доступный в первоначальном мажоритарном АУЗ. Маловероятно, что АУЗ, созданный нашим методом, породил бы SendingSets и ReceivingSets со средним размером N=2 или больше.

Показано, что эффективность этого класса алгоритмов в основном зависит от среднего; следовательно, наша схема лучше относительно этих двух методов.

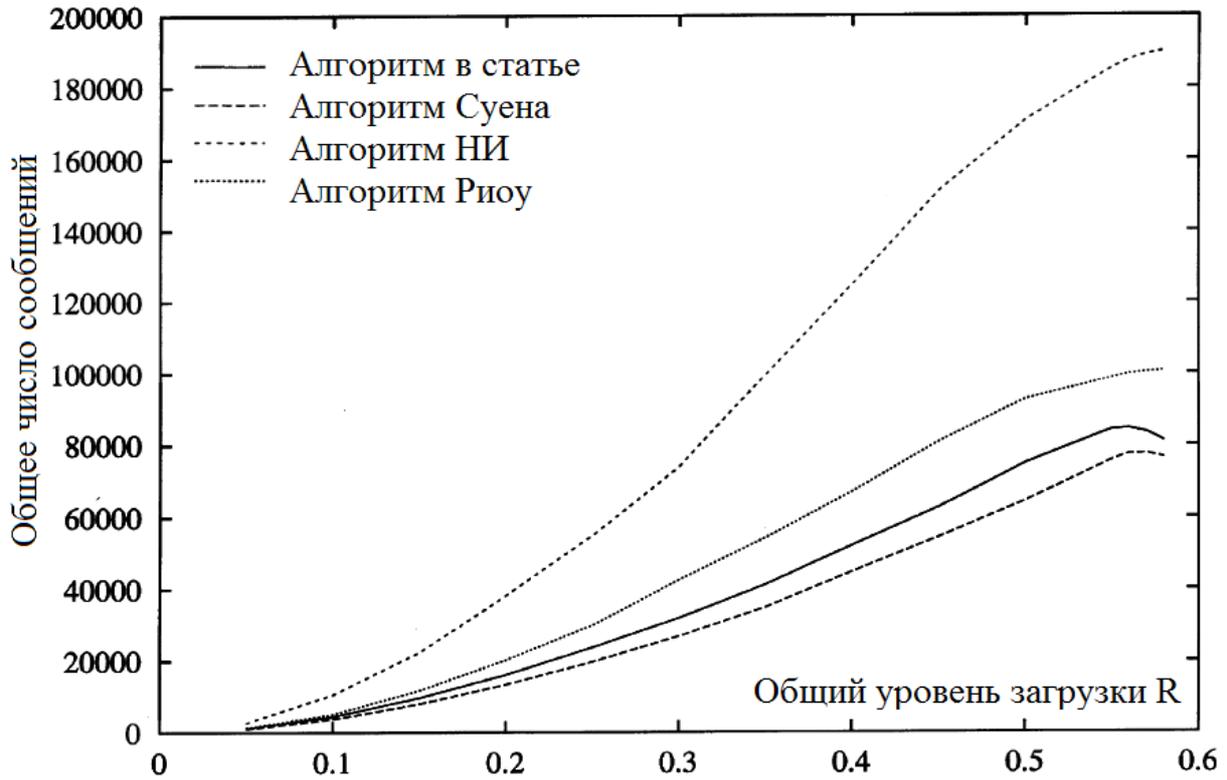


Рис. 5. Посылка сообщений загрузки, 50000 единиц времени ($N=8$).

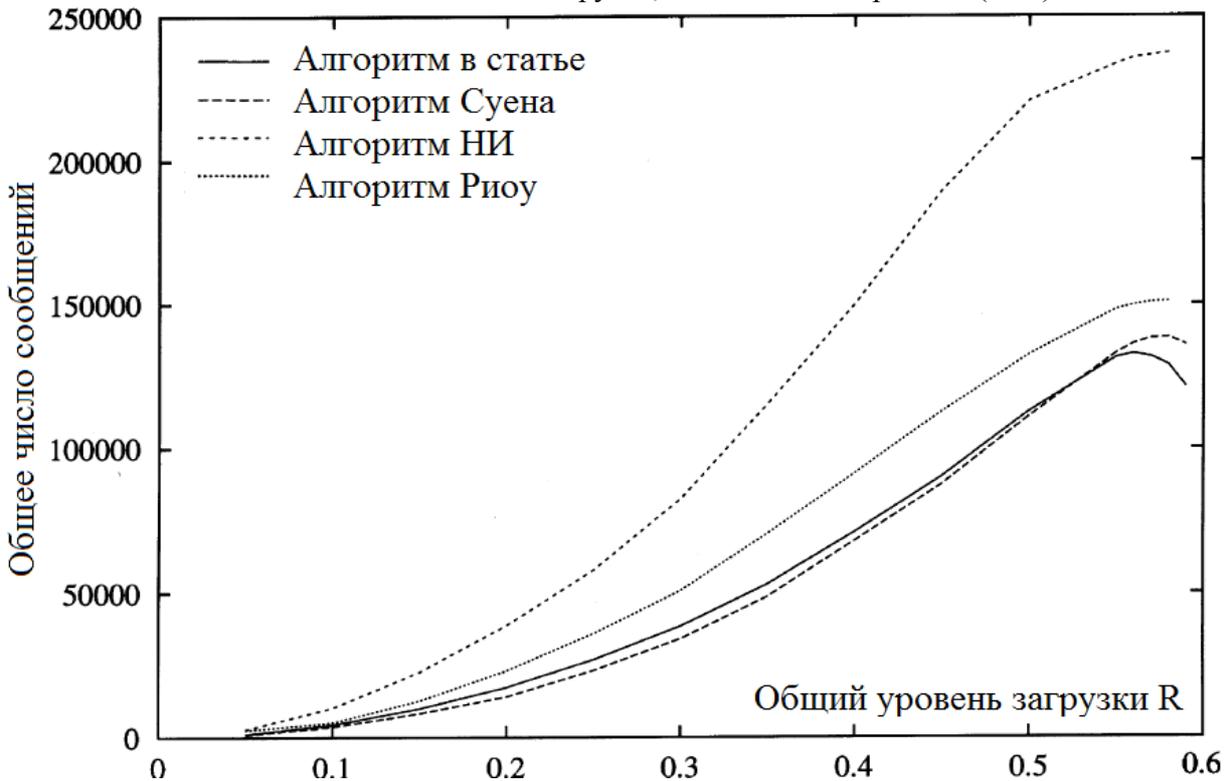


Рис. 6. Посылка всех сообщений, 50000 единиц времени ($N=8$).

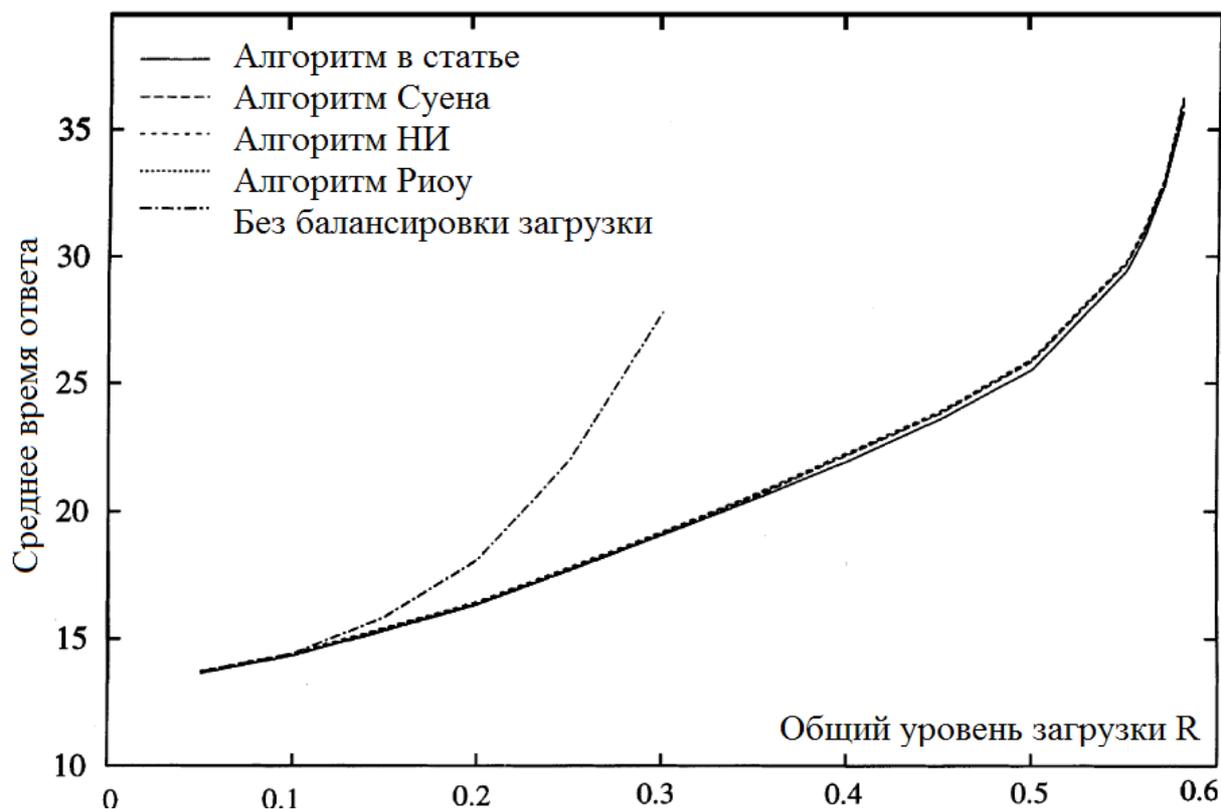


Рис. 7. Среднее время ответа (N=8).

4. Алгоритмизация повышения отказоустойчивости

Чтобы повысить отказоустойчивость системы в целом, необходимо оградить систему от нефункциональных процессоров. Считаем, что ошибки есть независимые отказы процессора, которые являются редкими и недолгими; если это не так, то вероятно, что один или большее количество процессоров должен быть заменен или восстановлен. Также считаем, что обработка, происходящая в процессоре в момент отказа, не выполнена. Наконец предполагаем, что в дополнение к своим нормальным задачам, один процессор (координатор) обеспечивает контроль состояния других процессоров. Любому процессору в сети может быть назначен этот режим работы.

Координатор периодически тестирует каждый процессор, чтобы определить, является ли он активным или нет. Когда координатор решает, что процессор отказал, он вычисляет новый SendingSets для остающихся процессоров. Чтобы увеличивать эффективность восстановления, координатор формирует SendingSets постоянного размера k , где $[N/2]-1 \leq k \leq N-1$, где N - число процессоров в сети. SendingSet произвольно назначается каждому процессору.

Координатор посылает сообщение каждому процессору, включая: (1) уведомления, что дефектный процессор исключен; (2) новый SendingSet процессора; (3) ReceivingSets процессоров в новом SendingSet. Если

процессор получает такое сообщение от координатора, он должен удостовериться, что задачи не "потеряны".

Если сообщение Migrate было послано отказавшему процессору, и сообщение Request не было получено, переназначенная задача должна быть переупорядочена. Наоборот, сообщение Request не должно быть послано, если его адресат - отказавший процессор.

Далее, каждый процессор должен передать свою текущую степень загрузки всем членам его нового SendingSet после получения уведомления об отказавшем узле. Тогда обработка может начинаться снова.

Одновременно координатор должен сохранить SendingSets, вычисленный для первоначальной системы. Когда отказавший узел восстанавливается, координатор может передать сообщение, указывающее на отказавший и затем восстановившийся процессор, и может восстановить SendingSet каждого процессора в его исходной конфигурации.

Наконец, чтобы принять меры на случай отказа координатора, еще один процессор решает задачу контроля координатора. Если координатор выходит из строя, контролирующий процессор немедленно принимает обязанности координатора и уведомляет оставшиеся процессоры об отказе координатора. Если требуется еще большая надежность, резерв может быть назначен на многие процессоры.

Псевдокод процесса FindFaults, который реализует процедуру, посредством которой координатор обнаруживает отказы процессора и инициализирует процесс восстановления, представлен ниже.

Процесс FindFaults

```

{
while(true){
    Проверка функционирования всех процессоров;
    If(один из процессоров отказал){
        Запомнить текущий SendingSet для восстановления;
        Вычислить новый SendingSet для работающих процессоров;
        Назначить SendingSet;
        Вычислить новый ReceivingSet на основе назначенных наборов;
        Отправить сообщение Fault каждому процессору, включить
        SendingSet и ReceivingSet этого процессора в SendingSet;
    }
}
}

```

Одновременно координатор выполняет процесс BackToNormal, который является ответственным за восстановление системы к ее первоначальному состоянию, когда отказавший процессор возвращается к нормальному состоянию. Процесс реагирует на сообщение Hello, посланное восстановившимся процессором.

Процесс BackToNormal; {

```
while(true){  
    if(получено сообщение Hello){  
        if(не существует другого отказавшегося процесса)
```

Каждому процессору посылается сообщение Reinstare, в SendingSet этого процессора вносятся первоначальные ReceivingSet и SendingSet процессоров;

```
        else {вычисляется новый SendingSet и ReceivingSet, основанный на  
        работающих процессорах;
```

```
            назначается SendingSet;
```

```
            посылается сообщение Reinstare каждому процессору, включаются  
            новые SendingSet и ReceivingSet в SendingSet;}
```

```
    }  
}
```

Наконец, каждый процессор выполняет процесс UpdateSystem, который проверяет сообщения Fault и Reinstare и соответственно модифицирует локальные переменные соответственно.

Процесс UpdateSystem; {

```
switch(тип сообщения) {
```

```
    case Fault:
```

```
        обновление SendingSet, пришедшего от координатора;
```

```
        if(задача была перенесена отказавшему процессору и не было получено  
        сообщение Reply){
```

```
            переназначить перемещение задачи в составленной очереди;
```

```
            пометить отказавший процессор и, поэтому, не посылать ему  
            сообщение Reply;
```

```
        }
```

```
        внести текущую загрузку в новый SendingSet;
```

```
        break;
```

```
    case Reinstare:
```

```
        переназначить SendingSet по сообщению, полученному от  
        координатора;
```

```
        break;
```

```
    }  
}
```

В ситуации, когда отказывают узлы, оставшиеся процессоры не пытаются сохранять сообщения Reply, предназначенные для отказавшего узла. Допускается, что работа, во время выполнения которой узел отказал, потеряна, и что задачи, оставленные незаконченными, будут представлены в отказавшем узле после его возвращения к работе.

УДК: 519.6

Жанг Хоанг

Технически университет, г.Хошимин, Вьетнам

О СХОДИМОСТИ МАСШТАБИРУЕМОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА К ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С УНИКАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ РАВНОВЕСИЯ

Аннотация. Рассмотрены особенности сходимости масштабируемого марковского процесса к детерминированной динамической системе с уникальной точкой равновесия.

Ключевые слова: Сходимость, марковский процесс, точка равновесия

1. Введение

В статье предложен и рассмотрен новый вид стохастических сетей. Они динамически совмещают ключевые характеристики двух главных классов сетей массового обслуживания – сетей с потерями и сетей Джексона [15].

1. Каждый узел сети имеет конечную емкость, таким образом каждый запрос, попадающий в заполненный узел, отклоняется, как в сетях с потерями.

2. Запросы посещают подмножество узлов в соответствии с некоторым (возможным) случайным маршрутом, как в сетях Джексона или Келли [16].

Введение такого класса сетей обусловлено математическим представлением мобильной беспроводной сети. Такая сеть представляет собой группу базовых станций, охватывающих некоторое географическое пространство. Область, в пределах которой пользователи мобильных телефонов связываются с базовой станцией, называется как ячейкой (сотой). Базовая станция отвечает за управление полосой пропускания, касающейся мобильных телефонов в своей ячейке (соте).

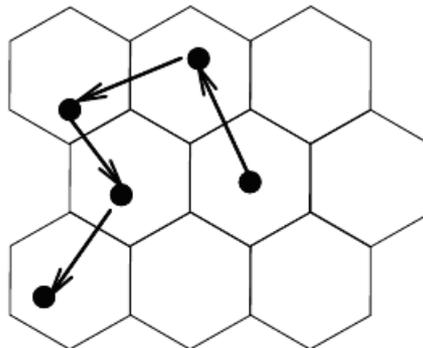


Рис. 1. Движение мобильного абонента между сотами мобильной сети

Новые вызовы инициируются в ячейках и передаются в соседние ячейки, когда мобильные абоненты перемещаются по сети. Новый вызов или вызов передачи обслуживания (передача управления от одной соты к другой при физическом перемещении абонента сотовой сети, чтобы для него не было нарушений связи) принимается, если есть доступная полоса пропускания в соте, в противном случае он отклоняется.

Раньше такие сети моделировались на макроуровне как сети с потерями, характеризующиеся скоростью потока вызовов, средней длиной вызова, скоростью потока вызовов передачи обслуживания, ограничения емкости количества вызовов в случае экспоненциального времени. Одна из важных характеристик - вероятность блокирования сети. Для анализа этих сетей были использованы различные их аппроксимации (см. [2, 5, 11] и ссылки в этих работах).

Предполагая Пуассоновское распределение прибытия вызовов и экспоненциальное время нахождения в каждом узле, временная эволюция такой сети с N узлами может быть представлена как скачкообразный Марковский процесс $X(t)$ со значениями в некотором конечном (но большом) множестве S . Оказывается, что, в отличие от сетей с потерями, Марковский процесс $X(t)$ в общем случае необратим или квазиобратим. Следовательно, в отличие от сетей Джексона (и им подобных) или чистых сетей с потерями, *эти сети не имеют стационарного распределения в мультипликативной форме.*

В статье анализируется эволюция таких сетей во времени, учитывая большие ограничения по трафику. Интенсивность потока вызовов и емкость узлов пропорциональны некоторой большой величине N . Такое масштабирование было использовано в [7] для изучения инвариантных распределений в сетях с потерями. Эволюция во времени сетей с потерями в этих условиях изучена в [6, 8]. Различное масштабирование рассматривается в [0].

Точки равновесия. Развитие сети во времени можно в общем случае описать следующим образом. Стохастический процесс $\bar{X}^N(t)$, связанный с состоянием сети для введенного параметра N есть вектор, описывающий количество запросов разных классов на узлах сети. Получаем следующее уравнение развития сети

$$\frac{d}{dt} \bar{X}^N(t) = F_N(\bar{X}^N(t)) + \bar{M}^N(t), \quad t \geq 0.$$

где $\bar{M}^N(t)$ - мартингал* [13], который стремится к нулю при больших N , F_N - достаточно сложная функция (связанная с генератором

* Напомним, что мартингал в теории случайных процессов — такой случайный процесс, что наилучшим (в смысле среднеквадратичного) предсказанием поведения процесса в будущем является его настоящее состояние.

соответствующего Марковского процесса), сходящаяся к некоторому пределу F . Доказано, что при $N \rightarrow \infty$, $\bar{X}^N(t)$ сходится к некоторой функции $x(t)$, удовлетворяющей соотношению

$$\frac{d}{dt} x(t) = F(x(t)), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Точки равновесия ограничивающих процессов - это решения x уравнения $F(x) = 0$.

Близкие исследования. В классических сетях с потерями инвариантная вероятность имеет представление *мультипликативной формы*. Однако в условиях большого трафика развитие этих сетей оказывается весьма сложным. В [6] показано, что для любого x векторное поле $F(x)$, управляющее ограничивающей динамической системой, задано в терминах некоторого отраженного случайного блуждания на R_+^d со скоростью переходов, зависящей от x . В точках x , в которых это случайное блуждание - эргодическое, $F(x)$ выражается в терминах инвариантного распределения. В точках x , в которых оно кратковременное, $F(x)$ определяет предельную на бесконечности величину. В общем случае неизвестно, всегда ли существует уникальная ограничивающая динамическая система. В работах [3, 4, 6, 12] рассмотрены некоторые примеры с одним или двумя узлами, где показано, что уникальность имеет место.

Результаты. Используя терминологию сотовых сетей, можно сказать, что пользователь, вошедший в сеть, соответствует новому запросу на подключение в соте (ячейке). Разные классы клиентов получают доступ к сети; эти классы отличаются интенсивностью поступления вызовов, временем нахождения в узле, продолжительностью вызова и маршрутом перемещения в сети. Во время вызова пользователь перемещается от одной ячейки сети к другим в соответствии с некоторым Марковским процессом, зависящим от класса вызова. Когда пользователь перемещается другую ячейку, в этой ячейке должно быть место для приема пользователя, иначе запрос пользователя отклоняется. Если вызов пользователя не был отклонен при перемещении в сети, вызов завершается по истечении некоторого времени.

Для сетей, анализируемых в данной работе, несложно установить уникальность ограничивающей динамической системы. Основная сложность заключается в сложности системы уравнений, определяющих точки равновесия динамической системы. Так как, по всей видимости, не существует какого-то простого метода решения этих уравнений, вопрос о единственности точек равновесия представляется серьезной проблемой.

Работа организована следующим образом: в разделе 2 вводится Марковское описание этих сетей, в разделе 3 представлены результаты оценки сходимости и описание ограничивающей динамической системы.

2. Стохастическая модель

Сеть состоит из конечного множества I узлов, узел $i \in I$ имеет емкость $[c_i N]$, где $c_i > 0$ и N - натуральное. Сеть получает конечное число классов клиентов индексированных конечным множеством R ; класс $r \in R$ клиентов поступает в сеть в соответствии с Пуассоновским процессом в потоке $\lambda_r N$, где $\lambda_r > 0$.

Продолжительность вызова. Клиент класса r , который ни разу не выходит из сети во время своего перемещения по сети, затрачивает экспоненциально распределенное время с параметром μ_r (продолжительность вызова в контексте мобильных сетей). Вариант с $\mu_r = 0$ не исключен и соответствует случаю, когда клиент постоянно находится в сети до тех пор, пока он не удаляется из сети, то есть пока он не войдет в заполненный узел.

Время ожидания. Время пребывания клиента класса r в любом узле $i \in I$ распределено экспоненциально с параметром γ_r . Таким образом, клиент может покинуть узел до окончания времени ожидания в связи с окончанием вызова (определяется параметром μ_r).

Маршрутизация. Клиент класса r , входящий в сеть, прибывает в некоторый случайный (определяемый законом распределения q_r) узел множества I , и затем он перемещается от одного узла к другому, либо за пределы сети (обозначим как узел 0) в соответствии с некоторой матрицей переходов $p^{(r)}$ на $I \cup \{0\}$. Изменяя параметр времени пребывания, без потери общности можно предположить, что матрица $p^{(r)}$ имеет нули на диагонали.

Требование к емкости. Все клиенты занимают одинаковую емкость, находясь в любом узле.

Все случайные процессы, описывающие поступление вызовов, время пребывания в узле или продолжительность вызовов считаются независимыми.

Определенный выше класс сетей рассматривает клиентов с детерминированным маршрутом, как в сетях Келли и клиентов с Марковским маршрутом, как в сетях Джексона. На рис. 2 представлена сеть с двумя типами клиентов. Клиенты типа 1 следуют по определенному маршруту, в то время, как клиенты типа 2 могут из узла 4 попасть в узел 1 или 3, емкость узлов равна 5. Обратим внимание, что не было сделано никаких предположений относительно матрицы переходов $p^{(r)}$ ($;$), и таким образом некоторые классы операций могут следовать по бесконечному маршруту (циклу) в сети.

Определение. Для $i \in I$, $r \in R$ и $t \geq 0$, $X_{i,r}^N(t)$ определяет число клиентов класса r в узле i во время t . $X^N(t) = \{X_{i,r}^N(t), i \in I, r \in R\}$ есть соответствующий процесс. Нормированный процесс определяется как

$$\bar{X}_{i,r}^N(t) = \frac{1}{N} X_{i,r}^N(t)$$

и

$$\bar{X}^N(t) = \{\bar{X}_{i,r}^N(t), i \in I, r \in R\}.$$

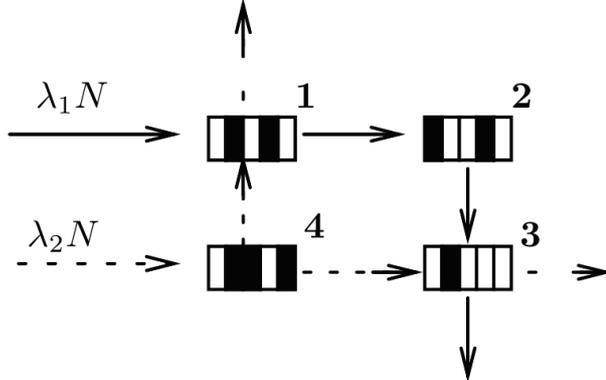


Рис. 2. Сеть с двумя типами клиентов

Обозначим множество узлов, которые могут быть посещены клиентом класса r , как $I_r \subset I$, то есть $i \in I_r$ когда i посещается с положительной вероятностью Марковской цепи с матрицей переходов $p^{(r)}$ и начальным распределением q_r . Предполагается, что $I = \bigcup_{r \in R} I_r$. Пространство состояний

Марковского процесса $X^N(t)$ определяется как

$$S_N = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_{i,r}) \in N^{I \times R} : \sum_r x_{i,r} \leq c_i N; \\ x_{i,r} = 0, \text{ если } i \notin I_r \end{array} \right.$$

Q -матрица $A_N(x, y)$ для $X^N(t)$ определяется следующим образом:

- Прибытие в узел i клиента класса r :

$$A_N(x, x + e_{i,r}) = \lambda_r N q_r(i) L_{\{x+e_{i,r} \in S_N\}}$$

- Завершение обслуживания, уход из узла или выход из сети:

$$A_N(x, x - e_{i,r}) = x_{i,r} (\mu_r + \gamma_r \sum_{j \in I} p^{(r)}(i, j) L_{\{x+e_{i,r} \notin S_N\}}) + \gamma_r p^{(r)}(i, 0);$$

- Перемещение из узла i в узел j :

$$A_N(x, x - e_{i,r} + e_{j,r}) = \gamma_r x_{i,r} p^{(r)}(i, j) L_{\{x+e_{i,r} \in S_N\}},$$

где $e_{i,r}$ - единичный вектор в координатах (i, r) . Пространство состояний нормированного процесса $\bar{X}^N(t)$ задается следующим образом:

$$\chi_c = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_{i,r}) \in R_+^{I \times R} : \sum_r x_{i,r} \leq c_i; \\ x_{i,r} = 0, \text{ если } i \notin I_r \end{array} \right.$$

нижний индекс $c = (c_i)$ у χ_c относится к вектору емкостей.

3. Сходимость

Следующие результаты определяют детерминированное поведение $\bar{X}^N(t)$ при $N \rightarrow \infty$ и являются следствием того факта, что стохастические возмущения исходной системы порядка \sqrt{N} и поэтому ими можно пренебречь из-за масштабирования $1/N$.

Для описания эволюции сети во времени вводится процесс N_ξ , означающий Пуассоновский процесс с параметром $\xi > 0$, процесс с верхним индексом $N_\xi^p, p \in N^d, d \in N$ вводится, когда нужно несколько таких Пуассоновских процессов. Пример: $N_{\lambda_r q_r(i)}$ для $i \in I$ и $r \in R$ описывает Пуассоновский процесс поступления клиентов класса r в узел i . Аналогично, для $k \geq 1$ $N_{\gamma_r p^{(r)}(i,j)}^k$ - Пуассоновский процесс, связанный с перемещением k -го клиента класса r из узла i в узел $j \in I \cup \{0\}$.

Для $t \geq 0$ и $(i, r) \in I \times R$,

$$Y_i^N(t) = \lfloor c_i N \rfloor - \sum_r X_{i,r}^N(t).$$

Величина $Y_i^N(t)$ обозначает число свободных мест в узле i . Процесс $X^N(t)$ может быть представлен как решение следующего стохастического интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} X_{i,r}^N(t) = & X_{i,r}^N(0) + \int_0^t L_{\{Y_i^N(s-) > 0\}} N_{\lambda_r N q_r(i)} ds + \\ & + \sum_{j \in I - \{i\}} \sum_{k \geq 1} \int_0^t L_{\{k \leq X_{j,r}^N(s-), Y_i^N(s-) > 0\}} N_{\gamma_r p^{(r)}(j,i)}^k ds - \\ & - \sum_{\substack{j \in I \cup \{0\} \\ j \neq i}} \sum_{k \geq 1} \int_0^t L_{\{k \leq X_{i,r}^N(s-)\}} N_{\gamma_r p^{(r)}(i,j)}^k ds - \sum_{k \geq 1} \int_0^t L_{\{k \leq X_{j,r}^N(s-)\}} N_{\mu_r}^{i,k} ds \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f(t-)$ обозначает предел слева функции f в момент времени t .

Компенсировав Пуассоновский процесс, или заменяем дифференциальный член $N_\xi ds$ мартингалным инкрементом $N_\xi ds - \xi ds$, получаем

$$\begin{aligned} X_{i,r}^N(t) = & X_{i,r}^N(0) + M_{i,r}^N(t) + \lambda_r N q_r(i) \int_0^t L_{\{Y_i^N(s-) > 0\}} ds + \\ & + \gamma_r \sum_{j \in I} p^{(r)}(j,i) \int_0^t X_{j,r}^N(s-) L_{\{Y_i^N(s-) > 0\}} ds - (\gamma_r + \mu_r) \int_0^t X_{i,r}^N(s-) ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где $M_{i,r}^N(t)$ есть мартингал, полученный компенсацией интеграла предыдущих выражений.

Обозначая нормированный мартингал как $\bar{M}_{i,r}^N(t) = M_{i,r}^N(t)/N$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i,r}^N(t) = & \bar{X}_{i,r}^N(0) + \bar{M}_{i,r}^N(t) + \lambda_r q_r(i) \int_0^t L_{\{Y_i^N(s-) > 0\}} ds + \\ & + \gamma_r \sum_{j \in I} p^{(r)}(j, i) \int_0^t \bar{X}_{j,r}^N(s-) L_{\{Y_i^N(s-) > 0\}} ds - (\gamma_r + \mu_r) \int_0^t \bar{X}_{i,r}^N(s-) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 1. Если начальное состояние $\bar{X}^N(0)$ сходится к $x \in \chi_c$ при $N \rightarrow \infty$, то в топологии Скорохода [14] $\bar{X}^N(t)$ сходится к решению $x(t)$ следующего дифференциального уравнения: для $(i, r) \in I \times R$,

$$\frac{d}{dt} x_{i,r}(t) = \left(\lambda_r q_r(i) + \gamma_r \sum_i x_{j,r}(t) p^{(r)}(j, i) \right) \tau_i(x(t)) - (\gamma_r + \mu_r) x_{i,r}(t) \quad (5)$$

$$\text{при } x(0) = x \text{ и } \tau_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_r x_{i,r} < c_i, \\ \rho_x^i \wedge 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где $a \wedge b = \min(a, b)$ для $a, b \in R$ и

$$\rho_x^i = \frac{\sum_r (\gamma_r + \mu_r) x_{i,r}(t)}{\sum_r \left[\lambda_r q_r(i) + \gamma_r \sum_j x_{j,r}(t) p^{(r)}(j, i) \right]}$$

Сходимость в топологии Скорохода означает сходимость распределения для топологии Скорохода на пространстве траекторий.

Доказательство теоремы 1. Вспомним, что если N_{ξ_1} и N_{ξ_2} - два независимых Пуассоновских процесса и если $M_p(t) = N_{\xi_p}((0, t]) - \xi_p t$, $p = 1, 2$ - ассоциированные с ними мартингалы, то они ортогональны в том смысле, что $(M_1(t)M_2(t))$ есть такой мартингал, что $\langle M_1, M_2 \rangle(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ [10]. Похожее свойство справедливо для стохастических интегралов вероятностных процессов $H_1(t)$ и $H_2(t)$ — для $t \geq 0$ имеет место

$$\left\langle \int_0^t H_1(s) dM_1(s), \int_0^t H_2(s) dM_2(s) \right\rangle(t) = 0$$

Возрастающий процесс нормированного мартингала, определенного выше, есть

$$\langle \bar{M}_{i,r}^N, \bar{M}_{i,r}^N \rangle(t) = \frac{1}{N^2} \langle M_{i,r}^N, M_{i,r}^N \rangle(t),$$

и возрастающий процесс в правой части уравнения, представленного выше, можно выразить, используя ортогональность независимых Пуассоновских процессов. Используя тот факт, что для $(i, r) \in I \times R$ и $t \geq 0$, $X_{i,r}^N \leq \lfloor c_i N \rfloor$, получаем, что существует некоторая константа K такая, что

$$E([\bar{M}_{i,r}^N(t)]^2) = E(\langle M_{i,r}^N, M_{i,r}^N \rangle(t)) \leq KNt.$$

Из неравенства Дуба [17] следует, что мартингал $\bar{M}_{i,r}^N(t)$ сходится по мере к 0 равномерно на компактных множествах. Поэтому стохастические колебания, представленные мартингалами, в пределе стремятся к 0.

Теперь, используя результаты работы [9], аналогично работе [6] (в которой рассмотрены сети с потерями и использованы технологии распределения Дирихле [18]), можно доказать, что любой слабый предел $X=(X_{i,r})$ процесса \bar{X}^N для $(i,r) \in I \times R$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$X_{i,r}(t) = X_{i,r}(0) + \int_0^t \left(\lambda_r q_r(i) + \gamma_r \sum_{j \in I} p^{(r)}(j,i) X_{j,r}(s) \right) \pi_{X(s)}(\bar{N}_i^1) ds - (\gamma_r + \mu_r) \int_0^t X_{i,r}(s) ds, \quad (6)$$

$$\text{где } \bar{N}_i^1 = \{m = (m_j) \in (N \cup \{+\infty\})^I : m_i \geq 1\}$$

и для $x = (x_{i,r}) \in \chi_c$ величина π_x есть некоторая стационарная случайная величина на $\bar{N}_i^1 = (N \cup \{+\infty\})^I$ Марковском переходном процессе, Q - матрица $V_x(\cdot, \cdot)$ которого определяется следующим образом:

$$V_x(m, m - e_i) = \sum_r \lambda_r q_r(i) \text{ при } m_i \geq 1;$$

$$V_x(m, m + e_j) = \sum_r x_{i,r} \left(\mu_r + \gamma_r \left(p^{(r)}(i, 0) + \sum_{j \in I} p^{(r)}(i, j) L_{\{m_j=0\}} \right) \right);$$

$$V_x(m, m - e_i + e_j) = \sum_r \gamma_r x_{j,r} p^{(r)}(i, j) \text{ при } m_i \geq 1;$$

где e_i - i -й единичный вектор в R^I . Кроме того, распределение вероятностей π_x должно удовлетворять следующему условию:

$$\pi_x(m \in N^I : m_i = +\infty) = 1 \text{ при } \sum_r x_{i,r} < c_i. \quad (7)$$

Марковский процесс $m^x(t)$ ассоциированный с матрицей $V_x(\cdot, \cdot)$ описывает развитие $Y^N(t/N) = \{Y_i^N(t/N)\}$, т.е. масштабированный во времени процес, описывает количество свободных мест в разных узлах на временном интервале $[t, t+Ndt)$, когда нормированный процесс \bar{X}^N находится в окрестности x в нормальном масштабе времени. В сравнении с $X^N(t)$, процесс $Y^N(t)$ действительно развивается в ускоренном масштабе времени, таким образом

$$\int_t^{t+dt} L_{\{Y_i^N(s-) > 0\}} ds \square \pi_x(\bar{N}_i^1) dt,$$

Т.е. в пределе, такие величины могут быть заменены средними значениями индикаторных при некоторых предельных режимах π_x от Y^N при $\bar{X}^N(t) \square x$. В работе [6] представлено детальное рассмотрение этих вопросов. См. также [3, 4, 12] для анализа некоторых примеров.

В нашем случае мартингалы $m^x(t)$ также Марковские, учитывая то, что каждый клиент занимает только один узел (не может занимать несколько

узлов одновременно) и обслуживание клиента в узле i зависит только от количества свободных мест в этом узле. Пусть для $i \in I$ процесс $\{m_i^x(t)\}$ описывает количество свободных мест в узле i , когда нормированный процесс в окрестности x есть классический процесс "рождения-гибели" на \bar{N} , скорость которого задана следующим образом:

$$q(m, m+1) = N \sum_r (\gamma_r + \mu_r) x_{i,r},$$

$$q(m, m-1) = N \sum_r \left(\lambda_r q_r(i) + \gamma_r \sum_j x_{j,r} p^{(r)}(j, i) \right)$$

при $m \geq 1$.

Точка $+\infty$ - поглощающая точка. При условии

$$\sum_r (\gamma_r + \mu_r) x_{i,r} < \sum_r \left(\lambda_r q_r(i) + \gamma_r \sum_j x_{j,r} p^{(r)}(j, i) \right) \quad (8)$$

геометрическое распределение с параметром

$$\frac{\sum_r (\gamma_r + \mu_r) x_{i,r}}{\sum_r \left(\lambda_r q_r(i) + \gamma_r \sum_j x_{j,r} p^{(r)}(j, i) \right)} = \rho_x^i$$

и распределение Дирака $\delta_{+\infty}$ в точке $+\infty$ есть две предельные инвариантные меры процесса $m^x(t)$.

Если $\sum_r x_{i,r} = c_i$ и условие (8) выполняется, тогда величина $\pi_x(\bar{N}_i^1)$ - это всегда некоторая выпуклая комбинация из 1 и ρ_x^i .

Для $i \in I$, суммируя уравнения (6) для всех r , легко убедиться, что величина $\pi_x(\bar{N}_i^1)$ не может быть больше, чем ρ_x^i (в противном случае условие конечной емкости $\sum_r x_{i,r} \leq c_i$ было бы нарушено). Таким образом

$$\pi_x(\bar{N}_i^1) = \rho_x^i.$$

Остальные случаи следуют из условия (7) или из быстротечности процесса $\{m_i^x(t)\}$.

Так как очевидно, что дифференциальное уравнение (5) имеет единственное решение, теорема доказана.

Библиографический список

1. Antunes N., Pacheco A., Rocha R. A Markov renewal based model for wireless networks// Queueing Syst. Theory Appl. 2002. 40. P. 247–281.
2. Antunes N., Fricker C., Robert P., Tibi D. Stochastic networks with multiple stable points. - 2006. - <http://www.arxiv.org/abs/math.PR/0601296>.
3. Bean N.G., Gibbens R.J., Zachary S. Asymptotic analysis of single resource loss systems in heavy traffic, with applications to integrated networks// Adv. in Appl. Probab. 1995. 27. P. 273–292.

4. Bean N.G., Gibbens R.J., Zachary S. Dynamic and equilibrium behavior of controlled loss networks// *Ann. Appl. Probab.* 1997. 7. P. 873–885.
5. Boucherie R.J., van Dijk N.M. On a queuing network model for cellular mobile telecommunications networks// *Oper. Res.* 2000. 48. P. 38–49.
6. Hunt P.J., Kurtz T.G. Large loss networks// *Stochastic Process Appl.* 1994. 53. P. 363–378.
7. Kelly F.P. Loss networks// *Ann. Appl. Probab.* 1991. 1. P. 319–378.
8. Kelly F.P. Blocking probabilities in large circuit-switched networks// *Adv. in Appl. Probab.* 1986. 18. P. 473–505.
9. Kurtz T.G. Averaging for martingale problems and stochastic approximation. *Applied Stochastic Analysis// Lecture Notes in Control and Inform. Sci.* Springer, Berlin. 1992. 177. P. 186–209.
10. Rogers L.C.G., Williams D. *Diffusions, Markov Processes, and Martingales 2: Ito Calculus.* - Wiley, New York. 1987.
11. Sidi M., Starobinski D. New call blocking versus handoff blocking in cellular networks// *Wireless Networks*, 1997. 3. P. 15–27.
12. Zachary S. Dynamics of large uncontrolled loss networks// *J. Appl. Probab.* 2000. 37. P. 685–695.
13. http://enc-dic.com/enc_math/Martingal-2119.html.
14. Колесников А.В. О топологических свойствах пространства Скорохода// *ТВП*, 1998, 43:4, 781–786.
15. Матальцкий М.А., Тихоненко О.М., Косарева Е.В. *Анализ и применения систем и сетей массового обслуживания.* – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2013.
16. Ховард Р. *Динамическое программирование и марковские процессы.* - М. : Сов. радио, 1964.
17. Неравенство Дуба. - <http://mi.mathnet.ru/tvp107>.
18. Frigyik B.A., Kapila A., Gupta M.R. Introduction to the Dirichlet distribution and related processes// *UWEE, Tech. Rep. UWEETR-2010-0006*, 2010.

≈ Zhang Hoang

≈ **About convergence of scalable Markov process to the determined dynamic system with unique equilibrium point**

≈ **Abstract.** Convergence of scalable Markov process to the determined dynamic system with unique equilibrium point discussed in this article.

≈ **Keywords:** Convergence, Markov process, equilibrium point

УДК 519.62

Д.В. Шаймухаметова, С.А. Мустафина

Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ РЕАКЦИИ ДЕГИДРИРОВАНИЯ МЕТИЛБУТЕНОВ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ АКТИВНОСТЬЮ КАТАЛИЗАТОРА В УСЛОВИЯХ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ

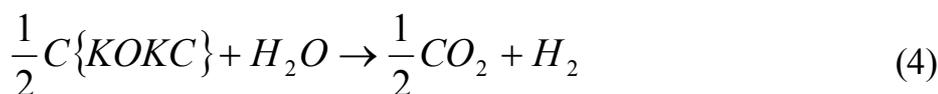
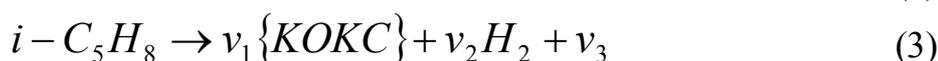
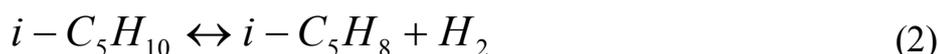
Аннотация. В работе построена математическая модель реакции дегидрирования метилбутенов на основе принципа квазистационарности с учетом изменения активности катализатора.

Ключевые слова: Дезактивация катализатора, дегидрирование метилбутенов, квазистационарность.

Двухстадийный процесс дегидрирования углеводородов C_5H_{10} состоит в последовательном превращении изопентана в метилбутены и смеси последних – в изопрен в присутствии оксидных железокалиевых катализаторов. Данный процесс является одним из основных промышленных методов синтеза изопрена, разработанным и внедренным в России.

При эксплуатации в течение нескольких тысяч часов в промышленном реакторе железокалиевый катализатор постепенно теряет активность. Поэтому актуальным является совершенствование существующих процессов производства изопренов на основе доступного углеводородного сырья, в частности, построение новых математических моделей, позволяющих прогнозировать свойства основных показателей процесса [1].

Была рассмотрена четырехстадийная схема превращений процесса дегидрирования углеводородов C_5 . Схема и соответствующие ей кинетические уравнения скоростей имеют следующий вид [2]:



На свежем катализаторе скорость реакции записывается по известным правилам, основанным на теории стационарных реакций, т.е. в стационарном

режиме скорость реакции r^0 равна скорости любой из стадий механизма r_j^0 . Тогда приняв для реакций системы (1)-(4) в качестве лимитирующих стадий поверхностные реакции, получим кинетические уравнения скоростей химических реакций на свежем катализаторе в виде системы [3,4]:

$$r_1^0 = \frac{k_{+1}C_1 - k_{-1}C_2C_4}{(1 + b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3)^2}, \quad (5)$$

$$r_2^0 = \frac{k_{+2}C_2 - k_{-2}C_3C_4}{(1 + b_{21}C_2 + b_{22}C_3 + b_{23}C_4)^2}, \quad (6)$$

$$r_3^0 = \frac{k_3C_3}{1 + b_3C_4} \quad (7)$$

$$r_4^0 = \frac{k_4}{1 + b_4C_4} \quad (8)$$

где C_i – концентрации компонентов (моль/л), индексация компонентов по i : 1 – изопентан, 2 – метилбутены, 3 – изопрен, 4 – водород, 5 – продукты скелетных превращений (или продукты крекинга – ПК), 6 – диоксид углерода; r_j^0 – скорости химических реакций в стационарном режиме (кмоль/м³ч); k_i – константы скоростей реакций; b_i – коэффициенты адсорбции (м³/кмоль).

Дезактивации катализатора при промышленной эксплуатации происходила в следствии наличия в сырье каталитических ядов (хлор- и сероорганических соединений), присутствующих в смеси метилбутенов, используемой при синтезе изопрена. За счет разбавления сырья водяным паром в ходе реакции происходила частичная саморегенерация катализатора [5].

Поскольку основная реакция протекает по нелинейному механизму, а дезактивация катализатора протекает по линейному механизму, то уравнение изменения активности катализатора в данном случае запишется:

$$\frac{d\Theta_P}{dt} = w_P \Theta_3 - w_R \Theta_P$$

где Θ_0 – доля свободных активных центров; Θ_3 – доля адсорбированных молекул изопрена; w_P – вес стадии дезактивации, w_R – вес стадии саморегенерации.

Из механизма реакции определяем выражение для Θ_3 , которое будет равно:

$$\Theta_3 = b_{22}C_3\Theta_0$$

Тогда переходя к относительной активности катализатора уравнение дезактивации примет вид:

$$\frac{da}{dt} = 2aw_p \frac{b_{22}C_3}{(1 + b_{21}C_2 + b_{22}C_3 + b_{23}C_4)^2} - 2w_R(\sqrt{a} - a).$$

Веса стадий дезактивации и саморегенерации соответственно равны:

$$w_p = k_3C_R,$$

$$w_R = k_4.$$

Тогда уравнение дезактивации катализатора будет равно:

$$\frac{da}{dt} = -2a \frac{k_3b_{22}C_3^2}{(1 + b_{21}C_2 + b_{22}C_3 + b_{23}C_4)^2} + 2k_4(\sqrt{a} - a). \quad (9)$$

Таким образом, кинетическую модель процесса дегидрирования метилбутонов в изопрен с учетом дезактивации катализатора можно представить системой уравнений:

$$r_1 = \frac{k_{+1}C_1 - k_{-1}C_2C_4}{(1 + b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3)^2} a, \quad (10)$$

$$r_2 = \frac{k_{+2}C_2 - k_{-2}C_3C_4}{(1 + b_{21}C_2 + b_{22}C_3 + b_{23}C_4)^2} a, \quad (11)$$

$$r_3 = \frac{k_3C_3}{1 + b_3C_4} a, \quad (12)$$

$$r_4 = \frac{k_4}{1 + b_4C_4} a, \quad (13)$$

$$\frac{da}{dt} = -2a \frac{k_3b_{22}C_3^2}{(1 + b_{21}C_2 + b_{22}C_3 + b_{23}C_4)^2} + 2k_4(\sqrt{a} - a). \quad (14)$$

В промышленных условиях процесс осуществляется при температуре 570-630°C и мольным разбавлением сырья водяным паром 1:20. На основе построенной модели (10)-(14) был проведен вычислительный эксперимент решения прямой задачи реакции дегидрирования метилбутонов при вариации температуры. Результаты расчетов представлены на рис. 1 – 2. На рис. 1 представлено изменение относительной концентрации метилбутонов в срезе по времени контакта при температурах 600°C и 640°C на свежем катализаторе и через 2 часа работы катализатора. На рис. 2 аналогично представлены срезы относительной концентрации изопрена по времени контакта при соответствующих температурах.

Из рис. 1 – 2 видно, что с ростом температуры скорость реакции растет и соответственно увеличивается выход продукта, а также увеличивается

расход исходного сырья. Так при температуре 600°C максимальный выход изопрена достигает значения 46% через 18 секунд времени контакта, а при температуре 640°C выход изопрена составляет 53% и достигается через 10 секунд.

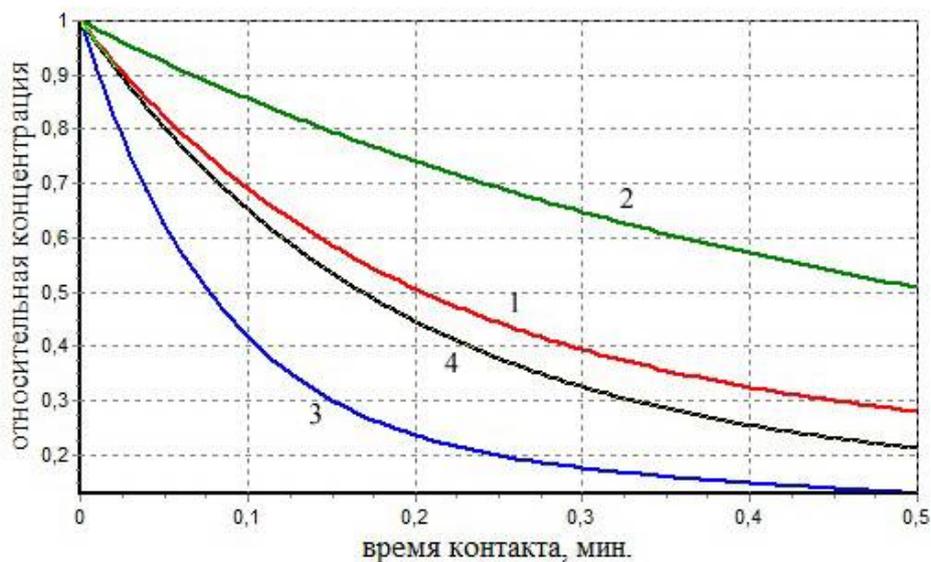


Рис.1. Изменение метилбутенов при температуре 600°C: 1 - на свежем катализаторе; 2 - через 10 ч работы катализатора; при температуре 640°C: 3 - на свежем катализаторе; 4 - через 10 ч работы катализатора

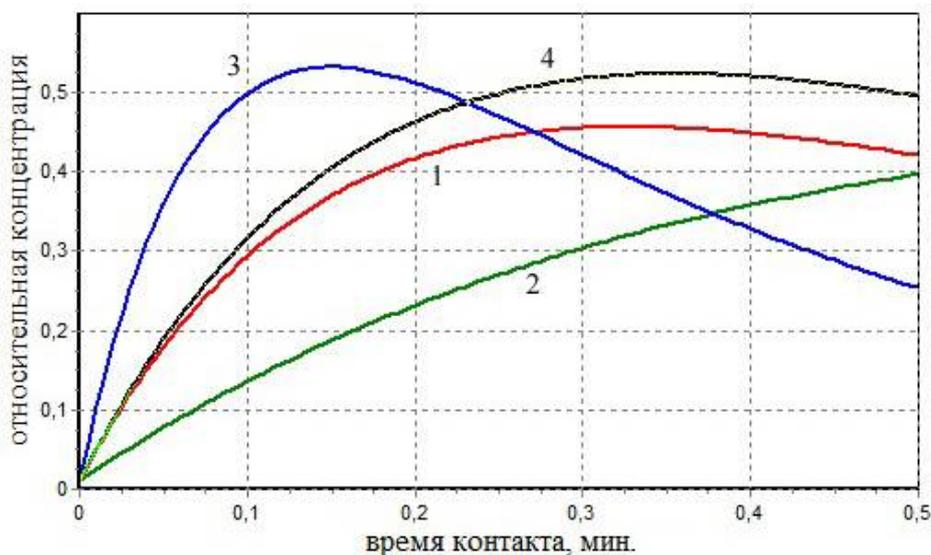


Рис.2. Изменение изопрена при температуре 600°C: 1 - на свежем катализаторе; 2 - через 10 ч работы катализатора; при температуре 640°C: 3 - на свежем катализаторе; 4 - через 10 ч работы катализатора.

Анализируя рисунки 1 – 2, можно также заметить, что с ростом температуры влияние дезактивации снижается. Так, при температуре 600°C через 10 часов работы катализатора на значение времени контакта 18 секунд изменение относительной концентрации по изопрену составляет 16%, а при

температуре 640°C на 10 секунд времени контакта изменение составляет 13%. Аналогичное влияние оказывает дезактивация на расход метилбутенов. При соответствующих значениях времени контакта при температуре 600°C изменение составило 25%, а при температуре 640°C - 23%.

Библиографический список

1. Бокин А.И. Дегидрирование метилбутенов в изопрен с использованием оксидных железокалиевых катализаторов : Дисс. ... канд. хим. наук. Уфа, 2004. 105 с.
2. Ильин В.М. Моделирование процесса дегидрирования бутенов в адиабатическом реакторе с неподвижным слоем железокалиевого катализатора КД-1 / В.М. Ильин, А.В. Балаев, Л.З. Касьянова, А.А. Сайфуллина, Ю.П.Баженов, Б.И. Кутепов // Катализ в промышленности. – 2006. - №5. – С. 42-47.
3. Островский Н. М. Кинетика дезактивации катализаторов. Математические модели и их применение. М.: Знание, 2001. 334с.
4. Берзина Д.В., Мустафина С.А. Построение математической модели процесса дегидрирования метилбутенов в изопрен с учетом дезактивации катализатора // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т.16, №3. С. 32-33. 109
5. Мустафина С.А., Берзина Д.В., Смирнов Д.Ю. Моделирование процесса дегидрирования метилбутенов в присутствии оксидных железокалиевых катализаторов // Катализ в промышленности. 2014. №4.С.22-26.

~ D.V. Shaimukhametova, S.A. Mustafina

~ **Modeling of the kinetics of the reaction of dehydrogenation of methylbutanol with the changing activity of the catalyst in conditions of quasi-stationarity**

~ **Abstract.** This paper presents a mathematical model of the reaction of the dehydrogenation of methylbutanol based on the principle of quasi-stationarity to reflect changes in the activity of the catalyst.

~ **Keywords:** Deactivation of the catalyst, the dehydrogenation of methylbutanol, quasi-stationary.

СОДЕРЖАНИЕ

Nguyen Thi Hien The smooth model of some relay – type systems and its applications	9
Абрамов П.Б. Моделирование немарковских процессов взаимодействия инфокоммуникационных систем на основе марковских форм с внешними потоками событий	15
Аралов М. Н. Моделирование и визуализация тепловых полей многослойных объектов	23
Блюмин С.Л., Сытник К.И. Новый гибридный метод оптимизации - отжиговая эволюция роя	28
Бормотова Г.О. Анализ применимости генетических алгоритмов для оптимизации функций на множестве разбиений	34
Воронова Е.В. Решение краевой задачи распространения теплоты от локального очага самосогревания зерна с помощью метода функциональных преобразований	42
Гнилицкая Ю.А., Балабан О.Р. Граничная оптимизация динамики течения многофазных сред в сетеподобных объектах	50
Данилин А.О., Петрухнова Г.В. Модель принятия решений на основе правил по устранению программных дефектов	55
Захарова О. И. Способ инкапсуляции свойств для проверки гипотез	60
Корчагин А. В. Автоматная модель чрезвычайной ситуации техногенного характера	68
Кремер О.Б., Подвальный С.Л., Журавлёва В.В. Разработка Web-сайта на основе кроссплатформенной технологии PHP	72
Локтева М.В. Модели разложения потока данных на корреляционные элементы	84
Ломакина Л.С., Суркова А.С. Анализ и моделирование в прикладных задачах обработки текстов	90
Львович И.Я., Преображенский А.П., Чопоров О.Н. Использование “муравьиного” алгоритма при построения моделей объектов, имеющих максимальные средние значения характеристик рассеяния	95
Мартынова Ю.В. Решение Спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля на графе типа «дерево»	100
Нгуен Тхи Хиен Обобщенная теорема о существовании и единственности предельного цикла и пример ее применения	109
Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Применение медленно меняющихся параметров Эйлера в задаче оптимального управления ориентацией недеформируемой орбиты космического аппарата	116
Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Кватернионное решение задачи оптимальной переориентации недеформируемой орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат	124
Папонов А.В. Программная реализация проверки гипотезы о нормальном распределении временных характеристик модели управления системы специального назначения при возникновении происшествий	131
Провоторова Е.Н. Об одной задаче оптимального быстрогодействия в эволюционных процессах	136

Рябчунов А.И. Исследование угло-частотной чувствительности антенны дифракционного излучения на основе слоя диэлектрика, экранированного решеткой.....	143
Седов В.А., Седова Н.А. Нечётко-продукционная модель определения дальности видимости.....	150
Ситник С.М. Спектральные свойства обобщённых дискретных преобразований Фурье.....	156
Скаков Е.С., Малыш В.Н. Муравьиный алгоритм для решения задачи размещения с ограничениями на мощности.....	167
Сон Лам Нгуен, Кравец О.Я. Применение схематического представления данных для упрощения и сокращения числа минимальных планов запроса.....	175
Сторожев С.В. Учет факторов неопределенности в моделях теории объемных упругих волн на основе использования аппарата теории нечетких множеств.....	187
Тхоай Ань Нгуен Изучение систем с нестационарными параметрами очереди М/М/1.....	196
Тярт Н.А. Особенности реализации алгоритма сортировки в задаче составления рейтинга объектов с противоречивыми экспертными оценками.....	208
Фыонг Чук Тхай, Кравец О.Я. Численная верификация агентного управления заданиями для систем распределенного межмодульного взаимодействия.....	212
Хоанг Жанг О сходимости масштабируемого марковского процесса к детерминированной динамической системе с уникальной точкой равновесия.....	225
Шаймухаметова Д.В., Мустафина С.А. Моделирование кинетики реакции дегидрирования метилбутенов с изменяющейся активностью катализатора в условиях квазистационарности.....	235

Научна публикация

Електронно издание

Изпълнителният секретар Т. М. Хусяинов.

Отговорни редактор С.Л. Блюмин, редактор-съставител.

Публикувано в авторската версия.

Издател:

"ЦЕНТЪР ЗА НАУЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ И ИНФОРМАЦИЯ "ПАРАДИГМА"" ЕООД
БЪЛГАРИЯ, област Варна, община Варна, гр. Варна 9002, р-н Одесос, ул. Опълченска No 27
E-mail: sparadigma@abv.bg Факс: +35952919740

